

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

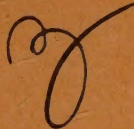
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alain BARRAUD

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES SEQUENCES DE PONDERATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 12 juillet 1971 devant la Commission d'Examen

MM. MEZENECV Président

LAMEAU	}	Examineurs
de LARMINAT		
FOULARD		
ABADIE		

N° d'Ordre : 4 (1971)
N° C.N.R.S. : A.O.59 50

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

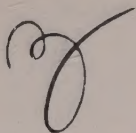
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alain BARRAUD

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES SEQUENCES DE PONDERATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 12 juillet 1971 devant la Commission d'Examen

MM. MEZENCEV President

LAMEAU	}	Examineurs
de LARMINAT		
FOULARD		
ABADIE		

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

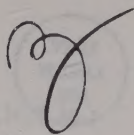
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alain BARRAUD

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES SEQUENCES DE PONDERATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 12 juillet 1971 devant la Commission d'Examen

MM. MEZENCEV

President

LAMEAU

de LARMINAT

FOULARD

ABADIE

Examineurs

11504-11511
W. C. 2, 2.3.2

THESES

PRESENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE LA MANÈGE

DOCTEUR-INGÉNIEUR

Alain BARRAUD

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE



THESE : CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES REGIMES DE FORTIFICATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Présentée par le candidat

Soutenue le 15 mars 1971 devant le Jury d'Examen

M. K. E. N. C. Y. Président

LAMBAU
L. LAMBAU
FOULARD
ABADIE

Examinateurs

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. MOLINARO

"

M. PAUC

"

M. PETRESCO

"

M. RAFFIN

"

M. VIVIER (E.N.S.M.)

"

M. TARDY (E.N.S.M.)

Mécanique

M. RAVILLY (E.N.S.M.)

"

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLLOUD

"

M. COLLET

"

M. MINN

"

M. MEZENGEV (E.N.S.M.)

"

M. MOUTON

"

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

"

M. PIERI

"

M. QUINIOU

"

M. WOJTKOWIAK

"

Mlle DEBRAU X

Biologie

M. GARRIGUES

"

Mme LE DOUARIN

"

M. LE DOUARIN

"

M. SELLIER

"

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire**M. MEYER****Mathématiques****M. BARDON****Physique****M. GOUREAUX**

«

M. LASKAR

«

Melle OFFRET (E.N.S.M.)

«

M. GOBIN (E.N.S.M.)**Chimie****M. MARTIN**

«

M. ROUXEL

«

M. TOURNOUX

«

M. DUPONT**Biologie****M. SAU DRAY**

«

M. OTTMANN**Sciences de la Terre****Maîtres de Conférences****M. FOUQUES****Mathématiques****M. IBISCH**

«

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

«

M. LEBORGNE

«

M. GUEVEL (E.N.S.M.)**Mécanique****M. SULMONT (E.N.S.M.)**

«

M. VILAINE (E.N.S.M.)

«

M. CAILLER (I.U.T.)**Physique****M. COTTU (I.U.T.)**

«

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (I.U.T.)

«

M. LONCKE

«

M. ROSIER

«

M. BOUCHY (I.U.T.)**Chimie****M. CHABANN EL**

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

«

M. AMOURIQ**Biologie****M. LEBRUN**

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER**Sciences de la Terre****M. NICOLAS**

«

Secrétaire Général : M. LERAY

A mes parents,

A ma femme

La présente thèse a été réalisée au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M., que dirige Monsieur le Professeur R. MEZENCEV.

Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à cette étude et les grandes facilités qu'il m'a accordées en me permettant de nombreux contacts extérieurs et en soutenant ma candidature au C.N.R.S.

Que Monsieur Ph. DE LARMINAT, qui a assumé la direction de ces recherches, veuille bien trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance. Il a été pour moi un guide efficace et je lui sais gré des inappréciables conseils qu'il a su me prodiguer.

Je voudrais également témoigner à Monsieur C. FOULARD mes remerciements pour le vif intérêt qu'il m'a manifesté, en qualité de parrain au C.N.R.S. et pour les précieuses remarques qu'il m'a apportées lors de nos rencontres.

J'exprime à Monsieur LAMEAU toute ma gratitude de l'honneur qu'il me fait en participant à mon Jury.

Ma reconnaissance va aussi à ceux qui m'ont accueilli, au cours d'un stage, aux Etudes et Recherches d'E.D.F. (Clamart). Je dois à Monsieur J. ABADIE des avis hautement autorisés en matière de programmation non linéaire. Je n'oublie pas non plus de nombreuses et fructueuses discussions avec Monsieur E. IRVING sur les problèmes d'identification.

Enfin, je m'en voudrais de terminer sans remercier tous ceux qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Outre, l'environnement que j'ai trouvé au Laboratoire d'Automatique, je pense particulièrement à Monsieur CHEVRE, Directeur du Centre de Calcul de l'E.N.S.M., pour son "assistance FORTRAN", mais aussi à toute son équipe à qui je dois une aide matérielle substantielle.

- $|5|$: report bibliographique en fin de chapitre
 $(2-7)$: équation 7, chapitre 2
 $+$: renvoi en bas de page
 $\forall$: quel que soit
 $\exists$: il existe
 $\#$: très peu différent de
 $\triangleq$: = par définition
 $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel à n dimensions sur le corps des réels
 s : variable de Laplace
 T : pas d'échantillonnage (sauf indication contraire)
 $|a|$: valeur absolue de a
 $\underline{x}$: vecteur colonne
 $||\underline{x}||$: norme euclidienne de $\underline{x}$
 A : matrice
 A^T : transposée de A
 $|A|$: déterminant de A
 $\text{tr } A$: trace de A
 A^{-1} : inverse de A
 A^+ : pseudo inverse de A
 $\mathbf{1}$: matrice unité
 $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$: vecteur colonne de composante $\frac{\partial f}{\partial x_i}$
 $[a_{ij}]$: matrice d'éléments a_{ij} , i indice ligne, j indice colonne
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 $N(\mu, \sigma)$: variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ
 $E(x)$: Espérance mathématique de x
 $p(a/b)$: densité de probabilité de a conditionnellement à b.

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION -	1
 Chapitre 1 - TRAITEMENT NUMERIQUE DES SYSTEMES CONTINUS -	 9
I - Introduction	9
II - Signaux continus - signaux discrets	10
II-1 Discrétisation d'un signal continu (échantillonnage)	10
II-2 Reconstruction d'un signal échantillonné	11
II-3 Erreur quadratique moyenne de reconstruction	13
III - Application à l'identification des processus	15
III-1 Position du problème	15
III-2 Réponse impulsionnelle - séquence de pondération	16
III-3 Approximation de l'intégrale de convolution	19
III-3-1 Bloqueur d'ordre zéro	19
III-3-2 Bloqueur d'ordre zéro compensé	21
III-3-3 Relation approchée entre $h(t)$ et $k(jT)$	22
 BIBLIOGRAPHIE -	 27
 Chapitre 2 - IDENTIFICATION ET ESTIMATION PARAMETRIQUE -	 29
I - Introduction	29
II - Position du problème	30
III - La méthode des moindres carrés	31
III-1 Interprétation géométrique de la méthode	34
III-2 Algorithmes de résolution numérique	35
III-2-1 Méthode de Choleski	35
III-2-2 Méthode de Householder	36
III-2-3 Méthode récurrente	38
III-3 Aspect statistique des moindres carrés	41
III-4 Extension de la méthode à des bruits corrélés	41
III-5 Environnement gaussien	45
IV - Approche bayésienne	47
IV-1 Estimation de Bayes	48

IV-2 Parallèle avec l'estimation du maximum de vraisemblance	53
V - Limitation dans la précision de l'identification	54
V-1 Influence du signal u_t	54
V-2 Estimation de la réponse impulsionnelle	57

BIBLIOGRAPHIE -	59
-----------------	----

Chapitre 3 - IDENTIFICATION ET FILTRAGE LINEAIRE -	61
--	----

I - Introduction	61
------------------	----

II - Filtrage de Kalman	62
-------------------------	----

III - Application du filtre de Kalman à l'estimation de la séquence de pondération	64
--	----

III-1 Identification en présence de perturbations indépendantes sur la sortie	65
---	----

III-2 Extension de l'algorithme en présence de perturbations colorées	66
---	----

III-3 Estimation d'une composante continue	68
--	----

III-4 Extension aux systèmes comportant une intégration	69
---	----

III-5 Estimation du gain statique	72
-----------------------------------	----

III-6 Généralisation aux systèmes multivariables	72
--	----

IV - Information a priori - Initialisation	73
--	----

IV-1 Temps d'identification	74
-----------------------------	----

IV-2 Prise en compte des connaissances a priori concernant l'estimation des séquences de pondération	76
--	----

IV-2-1 Matrice de covariance initiale $P_{0/0}$	77
---	----

IV-2-2 Estimation initiale $\hat{h}_{0/0}$	80
--	----

IV-2-3 Systèmes à transmission non instantannée	81
---	----

V - Echantillonnage à pas variable	84
------------------------------------	----

V-1 Principe de la méthode	84
----------------------------	----

V-2 Algorithme modifié	86
------------------------	----

VI - Détermination d'un modèle markovien des perturbations	89
--	----

VI-1 Estimation des paramètres du modèle auto-régression	90
--	----

VI-2 Un modèle approché	92
-------------------------	----

VII - Mise en oeuvre d'un code FORTRAN IV	93
---	----

BIBLIOGRAPHIE -	96
-----------------	----

Chapitre 4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX -	97
I - Simulation numérique de processus et de leur environnement	97
I-1 Influence de l'entrée u_t	99
I-2 La prise en compte d'informations a priori	102
I-3 Les perturbations et leur estimation	108
I-4 Echantillonnage à pas variable	112
I-5 Identification d'un système multivariable	116
II - Identification de processus réels	118
II-1 Alternateur	118
II-2 Avion Piaggio	123
II-3 Unité pilote générateur de vapeur	123
BIBLIOGRAPHIE -	124
CONCLUSION -	129
Annexe I	133
Annexe II	135

INTRODUCTION

Les premiers systèmes de commande, utilisés par les automaticiens, sont les régulateurs bien connus à action "P.I.D." (proportionnelle, intégrale, dérivée). Ceux-ci ont été, dans la plupart des cas, implantés sans qu'aucune "identification" n'ait été tentée, c'est-à-dire sans qu'aucun modèle mathématique du processus qu'ils doivent régler n'ait été obtenu.

Les réglages des différents paramètres sont réalisés, soit empiriquement, soit en suivant certaines règles (Ziegler - Nichols). De tels procédés peuvent donner assez facilement de bons résultats lorsqu'il s'agit de systèmes relativement simples.

Dans le domaine industriel, où l'on rencontre un éventail de types de processus très large : systèmes distribués, non linéaires, non stationnaires, pourvus de nombreuses entrées, le régulateur de l'automatique classique, n'est plus alors toujours apte à remplir sa tâche dans de bonnes conditions (bien qu'il soit encore fréquemment utilisé).

Il s'agit alors de s'orienter vers un système de commande plus élaborée, qui exige en contre partie une meilleure connaissance du processus. Si certaines théories n'ont encore qu'une vocation académique, la "numérisation" de petites unités de commande permet d'élargir immédiatement le champ d'application du régulateur classique.

Cependant, pour aller plus loin dans l'emploi des calculateurs de processus (optimisation), il est nécessaire de franchir l'étape de la représentation du système, c'est là l'objet de l'identification.

Le modèle est mathématique pour des raisons de commodité et il existe donc indépendamment du processus objet. Dans ces conditions, l'identification d'un processus s'apparente à une opération de reconnaissance. C'est donc sur leur comportement que l'on va comparer objet et modèle. Pour préciser le domaine d'application et la validité de ce dernier, on définira une classe de signaux d'entrée et un critère. On s'accordera alors à dire qu'identifier un processus c'est "déterminer, à partir de la connaissance d'entrées - sorties, un système appartenant à une classe spécifiée, équivalent au processus testé" (Zadeh 1962).

Dans cette optique, l'identification peut être abordée de deux points de vue différents :

- dans un contexte déterministe, où la plupart des méthodes élaborées conduisent à l'optimisation d'un critère.

- en adoptant une structure probabiliste, on doit alors résoudre un problème d'estimation (ce dernier se ramenant souvent à l'optimisation d'une fonctionnelle).

Devant la variété et la complexité des problèmes, à la fois, théoriques et pratiques, un choix s'impose. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes assignés la recherche d'un modèle appartenant à la classe des systèmes linéaires, dont les propriétés bien connues constituent un support théorique efficace. Une telle hypothèse offre néanmoins un large domaine d'application. En effet, ces modèles peuvent s'appliquer non seulement à des processus intrinsèquement linéaires, mais à tous ceux dont le comportement dynamique ne présente pas un aspect non linéaire prépondérant, dans leur domaine utile de fonctionnement.

Il nous a paru bon, avant d'aborder l'objet proprement dit de ce mémoire, d'exposer succinctement, au cours de ce propos introductif, quelques remarques générales sur les différentes approches que l'on peut concevoir. Nous ne traiterons, ici, que de processus discrets pour ne pas alourdir cet exposé des problèmes liés à l'échantillonnage.

Considérons l'identification d'un système linéaire, stationnaire, discret, du premier ordre, à partir des données entrées - sorties - u_t, s_t - sachant que cette dernière est perturbée par une séquence indépendante e_t .

La représentation paramétrique de ce système, s'écrit, sous forme d'équations récurrentes :

$$\begin{aligned} y_t &= a y_{t-1} + b u_t \\ s_t &= y_t + e_t \end{aligned} \quad ; t = 1, 2, \dots, N$$

Il s'agit donc d'estimer à partir des données (u_t, s_t) les deux paramètres a et b , caractérisant notre modèle.

Plusieurs techniques se présentent :

- La méthode du maximum de vraisemblance (M.V), qui, dans l'hypothèse gaussienne, conduit à minimiser, par rapport à a et b , la quantité :

$$Q = \sum_{t=1}^N (s_t - y_t)^2$$

représentant la somme des carrés des écarts entre la sortie modèle et la sortie objet (le processus). Notons, malgré la simplicité de notre exemple, que cette minimisation ne peut être obtenue explicitement, en raison de la non linéarité de l'écart $(s_t - y_t)$ par rapport à a introduit par le produit $a y_{t-1}$. D'une

façon générale, l'estimation du M.V., dont l'optimalité est assurée (au moins asymptotiquement), ne pourra être obtenue que par programmation non linéaire (P.N.L.) avec les difficultés que cela peut comporter (initialisation, convergence, minima locaux) [1], [2].

- Les techniques de filtrage non linéaire appliquées à un vecteur d'état "généralisé" $\underline{x}_t$ comportant l'état proprement dit du système, mais également les paramètres à estimer. Ici nous écrirons :

$$\begin{aligned} y_t &= a_t y_{t-1} + b_t u_t \\ \underline{x}_t^T &= [y_t, a_t, b_t] \quad \text{avec} \quad a_t = a_{t-1} \\ &\quad b_t = b_{t-1} \end{aligned}$$

Les non linéarités du problème sont encore dues à la présence du produit $a_t y_{t-1}$. La mise en oeuvre d'un filtre optimal conduit malheureusement, dans ce cas, à la résolution d'équations intégrales pour lesquelles il n'existe pas de solution explicite ; aussi élabore-t-on généralement des filtres sous-optimaux. On trouvera en [3] le développement d'une telle méthode, dont la structure récursive permet éventuellement une identification "en ligne".

- La méthode des moindres carrés (M.C.) appliquée à la minimisation de la quantité :

$$Q' = \sum_{t=1}^N [s_t - (a s_{t-1} + b u_t)]^2$$

qui représente la somme des carrés des résidus existant par suite du remplacement de y_t (inconnu) par s_t (mesuré), dans l'équation du système (méthode de "l'erreur d'équation"). Cette fois, Q' est quadratique en a et b , il existe donc un minimum unique qu'on peut obtenir explicitement. Cette méthode attrayante par sa simplicité conduit, hélas, à des estimations biaisées [4]. Pour éliminer ce biais, plusieurs auteurs [5], [6] ont proposé des solutions itératives dans lesquelles le problème initialement non linéaire est remplacé par une suite (théoriquement infinie) de problèmes linéaires résolus par la méthode des M.C.

Cette "non-linéarité-dans-les-paramètres" [7] constitue une des difficultés majeures de l'identification des modèles paramétriques (équations d'"état" ou transmittance).

Cependant, celle-ci peut quelquefois disparaître. C'est en particulier le cas lorsqu'on utilise la représentation "séquence de pondération" ou réponse impulsionnelle discrète. Un autre attrait de ce modèle est que, hormis la linéarité, aucune hypothèse n'est faite sur la structure des équations du système, et qu'on pourra identifier la réponse impulsionnelle d'un processus régit par des équations aux dérivées partielles, aussi bien que par des équations différentiel-

les ordinaires, à constantes localisées.

D'autres difficultés surgissent alors : sensibilité au bruit, nombre de paramètres à estimer (théoriquement infini). En fait, pour les systèmes asymptotiquement stables, on peut se contenter d'un nombre fini de "coefficients de pondération", mais ce nombre n'en reste pas moins, généralement, très supérieur à celui des paramètres d'une transformée en Z correspondante.

De nombreuses techniques ont été développées sans apporter réellement de solutions précises pour surmonter ces difficultés. Citons :

- Les méthodes de corrélation, connues de longues dates [8], [9], qui font encore l'objet d'étude, tant dans le domaine temporel [10] que fréquentiel [11]. Certains auteurs ont porté leur attention sur l'élaboration d'entrées test, adaptées à ces méthodes [12], [13]. Récemment, un ouvrage a été consacré en grande partie à l'identification de systèmes excités par des P.R.B.S.[†], [14].

- Les méthodes de moindres carrés, déjà citées, qui ont trouvé (dans ce cas particulier) de nombreux développements par l'intermédiaire de la théorie de l'estimation. Levin [15] semble être un des premiers à en avoir présenté une application à l'estimation de la séquence de pondération, (optimale dans l'hypothèse gaussienne). Depuis, des algorithmes plus sophistiqués ont été élaborés [16], [17], permettant éventuellement une identification en ligne du processus.

- Les "techniques de transformation" basées sur l'emploi de la transformée de Fourier rapide (F.F.T.)^{††} qui sont en quelque sorte la transposition dans le domaine fréquentiel des méthodes de moindres carrés [18]. Ces méthodes conduisent à des estimations sous optimales (variance supérieure à celle du modèle de Levin), mais bénéficiant de l'économie de calcul que représente la F.F.T.

En général, toutes ces méthodes exigent, en raison de l'instabilité de la déconvolution, une large redondance des données, pour obtenir des résultats significatifs. Par ailleurs, devant la dimension du problème qu'on aurait à résoudre, leur application se limite, la plupart du temps, à l'identification de systèmes monovariabiles.

Ces deux points représentent une contrainte sévère à l'égard d'applications industrielles pour lesquelles :

- d'une part, les enregistrements entrées - sorties peuvent être éventuellement de courte durée (de l'ordre du temps de réponse du processus).

[†] Pseudo Random Binary Sequence (séquence binaire pseudo aléatoire)

^{††} Fast Fourier Transform

- d'autre part, nous l'avons dit, ces systèmes sont souvent pourvus de nombreuses entrées.

L'orientation même que nous voulons donner à ce travail (application industrielle) met en évidence un troisième aspect du problème : la "mécanisation" de l'algorithme d'identification ne devra exiger qu'un minimum de moyens de calcul automatique.

Ainsi devrait se dégager clairement les difficultés sur lesquelles nous avons porté notre attention et qui ont fait l'objet de résultats nouveaux.

L'exposé de ce mémoire comportera quatre chapitres. Par souci de clarté, nous n'avons jusqu'ici considéré que des systèmes intrinsèquement discrets ; nous exposons donc dans un premier chapitre les approximations (échantillonnage - reconstruction) qu'impliquent le *Traitement numérique des systèmes continus*, dans le contexte de l'identification.

Le second chapitre *Identification et estimation paramétrique* représente essentiellement la compilation des principaux résultats de la théorie de l'estimation appliqués à l'identification de la séquence de pondération. Au cours de cet exposé, nous nous sommes efforcés de faire le lien entre les différentes méthodes qui ont été considérées. Enfin, celui-ci a été le prétexte pour définir un certain nombre de concepts que nous retrouvons par la suite.

Devant les limitations de ce point de vue, le problème d'identification a été repensé en terme de filtrage. Les résultats de la théorie de Kalman, appliqués à un vecteur d'état généralisé, comportant les paramètres à estimer, conduisent à un algorithme d'une grande souplesse d'utilisation. C'est dans le contexte de l'*Identification et filtrage linéaire* (ch 3) que nous présentons des résultats originaux concernant :

- La prise en compte d'informations a priori, par l'intermédiaire d'une initialisation convenable d'un algorithme récurrent, permettant de réduire considérablement le "temps d'identification".

- Une technique d'échantillonnage à pas variable, grâce à laquelle le nombre de coefficients de pondération, nécessaire pour représenter un système, a pu être réduit quelquefois dans un rapport de 1 à 4, ce qui, parallèlement, a rendu le temps de calcul 1 à 16 fois plus petit.

- Une méthode d'estimation des paramètres de l'environnement stochastique du processus, nécessaire à la mise en oeuvre de l'algorithme.

Un dernier chapitre a été consacré aux *Résultats expérimentaux* obtenus tant en simulation que sur processus réels. Ceux-ci nous ont permis de mettre en évidence l'efficacité de l'algorithme et de prouver qu'il était réellement opéra-

tionnel, dans le contexte que nous avons défini.

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | ASTROM K.J.
BOHLIN T. - "Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records"
I.F.A.C. Teddington 1965
- | 2 | ROGERS A.E.
STEIGLITZ K. - "Maximum likelihood estimation of rational transfer function parameters"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control AC-12, 1967
- | 3 | De LARMINAT Ph. - "Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Docteur-ès-Sciences, mai 1971
- | 4 | ASTROM K.J. - "Lectures on the identification problem - the least squares method"
Report, Dept of E.E., University of Southern California
Los Angelès, 1968
- | 5 | STEIGLITZ K.
Mc BRIDE L.E. - "A technique for the identification of linear systems"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control, AC-10, 1965
- | 6 | CLARKE D.W. - "Generalized least squares estimation of the parameters of a dynamical model"
I.F.A.C. Prague 1967
- | 7 | ASTROM K.J.
EYKHOFF P. - "Systems identification, a survey"
I.F.A.C. Prague, 1970
- | 8 | GOODMAN T.P.
RESWICK J.B. - "Determination of system characteristics from normal operating records"
Trans. ASME, February 1956
- | 9 | LINDENLAUB J.G.
COOPER G.R. - "Noise limitation of systems identification techniques"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control, Jan. 1963
- | 10 | DESAY R.C.
OLDENBURGER R. - "Identification of impulse response from normal operating data using the delay line synthesizer principle"
I.E.E.E. Trans. Autom Control, 1969
- | 11 | LABARRERE M.
ROCHE A.
GIMONET B. - "Identification method for multivariable system derived from correlation methods"
I.F.A.C. Prague 1970
- | 12 | BRIGGS P.A.N.
GODFREY K.R.
HAMMOND P.H. - "Estimation of process dynamic characteristics by correlation methods using pseudo random signals"
I.F.A.C. Prague 1967

- |13| CHANG J.A. - "Identification of multivariable control systems using ternary pseudo random sequences"
I.F.A.C. Düsseldorf, 1968
- |14| DAVIS W.D.T. - "System identification for self adaptive control"
Wiley Interscience, 1970
- |15| LEVIN M.J. - "Optimum estimation of impulse response in the presence of noise"
I.R.E. Trans. on circuit theory, March 1960
- |16| NISHIMURA M. - "On line estimation of the process parameters and its application to an adaptive control"
FUJII K.
SUSUKI Y. I.F.A.C. Varsovie, 1969
- |17| SMUK K. - "Comparison of some algorithms for least squares updating"
I.F.A.C. Prague, 1970
- |18| BUTCHER W.E. - "Identification of linear sampled data systems by transform techniques"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control 1969
- |19| BUTCHER W.E. - "Comparison of two impulse response identification techniques"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control, 1970

Chapitre 1

TRAITEMENT NUMERIQUE DES SYSTEMES CONTINUS

Au cours de ce chapitre, nous évoquons successivement la notion d'échantillonnage et de reconstruction de signal. Puis, placé dans le contexte de l'identification, nous tentons de préciser la nature des approximations dues à l'application d'une technique digitale à un processus continu.

I - INTRODUCTION -

L'implantation d'un calculateur numérique dans un processus pose des problèmes à la fois théoriques et pratiques. Nous allons nous attacher ici aux premiers qui sont dus à deux phénomènes principaux : la quantification et l'échantillonnage.

La quantification est due à la nature intrinsèque de la représentation digitale. La conversion d'une mesure, signal analogique, en un nombre ne peut être qu'une approximation, car le signal analogique peut prendre une infinité de valeurs alors que le nombre représentatif a une définition au plus égale au chiffre de plus faible poids. On trouvera en |1| les principes relatifs au choix des caractéristiques de quantification et au codage. Au niveau des calculs proprement dits, l'effet de la quantification peut, en général, être rendu aussi faible que l'on veut, en travaillant si nécessaire en double ou triple précision. Une étude très complète de la propagation des erreurs d'arrondi a été faite par WILKINSON |2|.

Le calculateur numérique exige un certain temps pour effectuer les calculs prescrits par le programme. Il est donc exclu qu'il puisse traiter de façon continue l'information, ce qui de plus le conduirait à effectuer une infinité d'opérations. Nous réservons le terme échantillonnage à cette quantification temporelle. C'est sur le plan théorique le trait le plus important né de l'emploi des calculateurs. Par la suite, nous supposerons négligeable le phénomène de la quantification et désignerons par système échantillonné, tout système dont au moins une variable est l'objet d'une quantification temporelle.

II - SIGNAUX CONTINUS - SIGNAUX DISCRETS -

Au cours de ce paragraphe, nous rappelons, d'une part certaines définitions à l'occasion desquelles nous introduisons les notations utilisées par la suite, d'autre part des résultats classiques relatifs aux systèmes échantillonnés que nous appliqueront ultérieurement à l'identification.

II-1 Discrétisation d'un signal continu (échantillonnage)

Désignons par $f(t)$ un signal continu tel que $f(t)$ soit nul pour t négatif. Nous considérons au cours de ce chapitre uniquement l'échantillonnage instantané et opérant avec un pas constant T . Nous définissons le signal discret $f^*(t)$ par :

$$f^*(t) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t-nT) \quad (1-1)$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac. Par la suite, on notera indifféremment par $f^*(t)$ le signal impulsionnel (1-1) et la suite numérique $f(nT)$.

On rappelle successivement |3| les expressions définissant :

- la transformée en Z de $f(t)$:

$$F(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (1-2)$$

- la transformée de Laplace de $f^*(t)$:

$$F^*(s) \triangleq F(z) \Big|_{z=e^{sT}} \quad (1-3)$$

Cette dernière relation peut être explicitée |4|, |5| sous les deux formes suivantes :

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \quad (1-4)$$

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + j n \omega_0) + \frac{1}{2} f(0^+) ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1-5)$$

Dans l'équation (1-5), $F(s)$ désigne la transformée de Laplace de $f(t)$; notons enfin, que le terme $\frac{1}{2} f(0^+)$ n'existe que lorsque $f(t)$ présente une discontinuité à l'origine.

Nous allons rappeler maintenant quelques autres résultats relatifs aux signaux aléatoires stationnaires et ergodiques, dont la fonction d'autocorrelation peut être calculée en établissant la moyenne de valeurs échantillonnées, propriété particulièrement intéressante à l'égard des signaux discrets.

Soit $x(t)$ un tel signal, sa fonction d'autocorrelation est définie par :

$$\phi_{xx}(\tau) \triangleq E[x(t) x(t+\tau)] \quad (1-6)$$

Sous l'hypothèse ergodique, on peut remplacer l'espérance mathématique par une moyenne temporelle :

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2 T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t) x(t+\tau) dt \quad (1-7)$$

ou encore :

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(nT) x(nT+\tau) \quad (1-8)$$

Ces mêmes expressions s'appliquent également à la fonction d'intercorrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$\phi_{xy}(\tau) = E[x(t) y(t+\tau)] \quad (1-9)$$

Soit $x^*(t)$ l'échantillonnage de $x(t)$. Désignons par $\phi_{xx}^*(jT)$ et $\phi_{xx}(\tau)$ leur fonction d'autocorrélation respective. Des expressions (1-6) et (1-8), il vient :

$$\phi_{xx}^*(jT) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 N+1} \sum_{k=-N}^N x(kT) x[(k+j)T] = \phi_{xx}(jT) \quad (1-10)$$

Ceci signifie que la fonction d'autocorrélation du signal échantillonné est l'échantillonnage de la fonction d'autocorrélation du signal continu (figure 1).

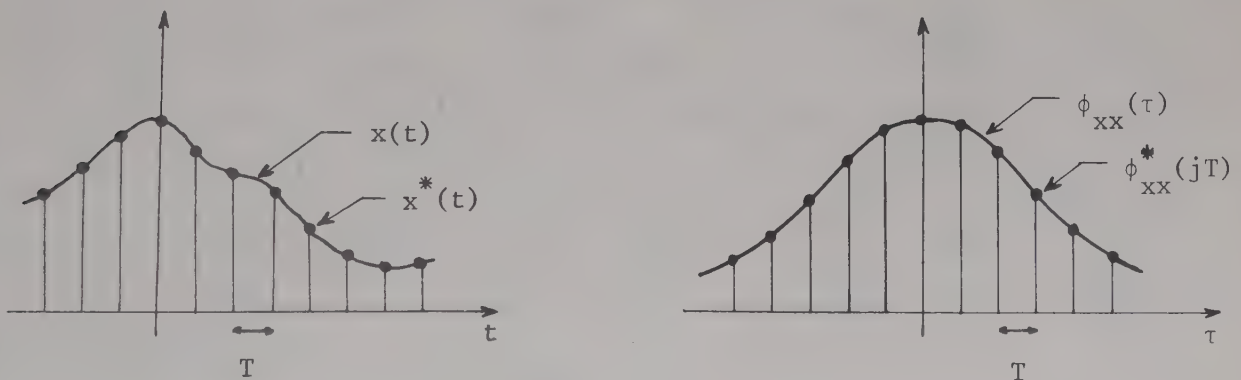


Fig. 1

II-2 Reconstruction d'un signal échantillonné

Rappelons le théorème de Shannon :

Théorème - Si une fonction $g(t)$ ne contient pas de fréquence supérieure à $f_{\max}$, elle est complètement déterminée en l'échantillonnant à une fréquence $f \geq 2 f_{\max}$. Dans ces conditions on peut exprimer sous forme analytique la fonction $g(t)$ à partir des valeurs prises aux différents points d'échantillonnage.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT) \frac{\sin \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n \right) \right]}{\pi \left(\frac{t}{T} - n \right)} ; T = \frac{1}{f} \quad (1-11)$$

Il est alors théoriquement possible de reconstruire un signal continu à partir de son échantillonnage. Considérons le problème suivant, figure 2. Soit $x(t)$ un signal continu, et $x^*(t)$ son échantillonnage. Cherchons la transmittance $B(j\omega)$ d'un système appelé "bloqueur" tel que, si à l'entrée il reçoit le signal $x^*(t)$, sa sortie soit $y(t) \equiv x(t)$.



Fig. 2

Désignons par $\Phi_x(j\omega)$ le spectre de $x(t)$; nous supposons que les conditions de Shannon sont vérifiées, c'est-à-dire :

$$|\Phi_x(j\omega)| = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$$

Soit $\Phi_{x^*}^*(j\omega)$ le spectre de $x^*(t)$. Nous avons représenté, figure 3, les modules de Φ_x et $\Phi_{x^*}^*$.

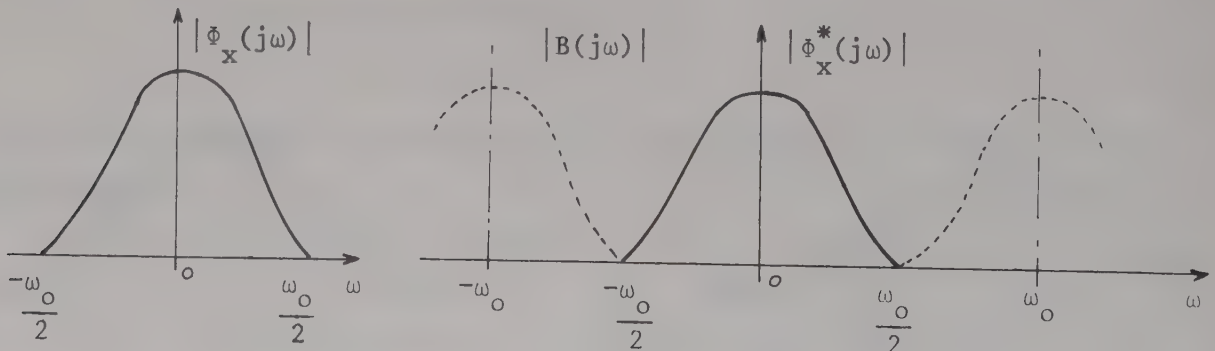


Fig. 3

Il vient, d'après les propriétés connues de transmission des spectres :

$$\begin{aligned} \Phi_y(j\omega) &= B(j\omega) \cdot \Phi_{x^*}^*(j\omega) \\ &= \frac{1}{T} B(j\omega) \cdot \Phi_x(j\omega) \end{aligned} \quad (1-12)$$

L'identité des signaux $x(t)$ et $y(t)$ entraîne celle de leur spectre.

De l'équation (1-12), il vient :

$$B(j\omega) = \begin{cases} T & \text{si } |\omega| < \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{si } |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \end{cases}$$

Ce résultat implique deux remarques ; d'une part les signaux, sauf exception, possèdent une infinité d'harmoniques (les conditions de Shannon ne peuvent être respectées), d'autre part le bloqueur "cardinal" auquel ont conduit les calculs, possède une transmittance paire ; il s'en suit que sa réponse impulsionnelle est non nulle pour t négatif (donc physiquement irréalisable en ligne).

Néanmoins, les résultats de ce théorème ont un intérêt indicatif sur la période d'échantillonnage à adopter, en admettant que le spectre du signal est négligeable au-delà d'une certaine fréquence. Il traduit la notion intuitive que la période T doit être petite vis-à-vis de la rapidité de variation du signal.

II-3 Erreur quadratique moyenne de reconstruction

La reconstruction d'un signal échantillonné ne peut être qu'imparfaite (théorème de Shannon). On se propose alors de calculer l'erreur quadratique moyenne résultant de l'emploi d'un bloqueur de transmittance $B(j\omega)$. Une approche fructueuse du problème peut être obtenue en considérant les signaux en présence, comme aléatoires. On a schématisé, à la figure 4, un problème un peu plus général où intervient une perturbation supplémentaire $b(t)$.

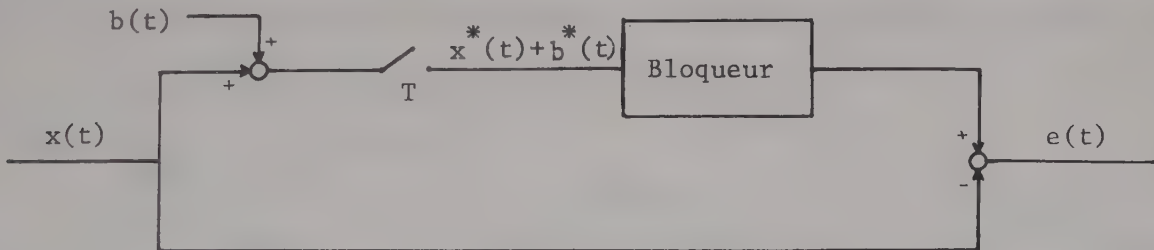


Fig. 4

Nous supposons que $x(t)$ et $b(t)$ sont stationnaires, ergodiques et respectivement indépendants.

Soit $\Phi_{ee}(j\omega)$ la densité spectrale de puissance de $e(t)$, c'est-à-dire, la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $\phi_{ee}(t)$.

On calcule l'erreur quadratique moyenne, sachant que :

$$E[e(t)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ee}(j\omega) d\omega \quad (1-13)$$

On démontre les résultats suivants [6] et [7] :

$$\Phi_{ee}(j\omega) = \frac{1}{T} B(j\omega) B(-j\omega) [\Phi_{xx}^*(j\omega) + \Phi_{bb}^*(j\omega)] + \left[1 - \frac{B(j\omega) + B(-j\omega)}{T}\right] \Phi_{xx}(j\omega) \quad (1-14)$$

De (1-13) et (1-14), il vient :

$$E[e(t)^2] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}(kT) + \phi_{bb}(kT)] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) h(t-kT) dt + \phi_{xx}(0) - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t) + h(-t)] \phi_{xx}(t) dt \quad (1-15)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du bloqueur. Cette équation (1-15) se simplifie grandement dans le cas des bloqueurs usuellement employés que nous introduisons maintenant.

La manière la plus naturelle (à défaut d'autres informations) pour "reconstruire" un signal continu à partir de valeurs échantillonnées est de supposer que ce signal reste constant entre chaque échantillon. Nous définissons, par là, le bloqueur d'ordre zéro ou "interpolation en escalier". Une meilleure approximation peut être obtenue en supposant que le signal est constant sur un intervalle T mais s'étendant sur un intervalle $T/2$ de part et d'autre de l'instant d'échantillonnage (bloqueur d'ordre zéro compensé). Pour terminer nous considérons l'interpolation linéaire dans laquelle le signal d'origine est remplacé par une suite de segments de droites passant par les points d'échantillonnage. On a représenté, figure 5, l'interpolation réalisée respectivement par ces trois bloqueurs dont on a précisé la transmittance en regard de chaque courbe.

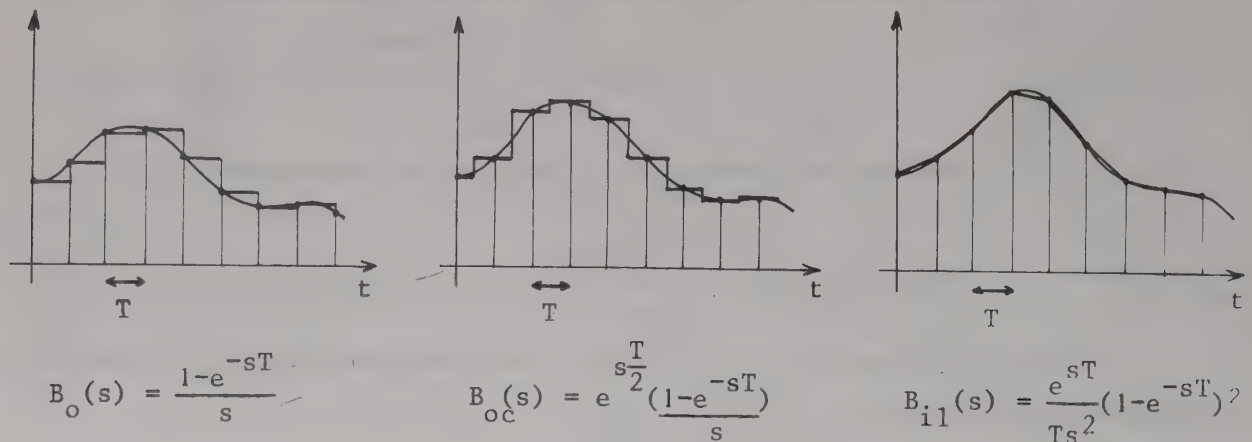


Fig. 5

Nous résumons dans le tableau suivant les résultats concernant ces derniers dans le cas où ϕ_{xx} et ϕ_{bb} sont quelconques et dans le cas où ϕ_{xx} est une exponentielle.

$\phi(t)$ $B(s)$	ϕ_{xx} ϕ_{bb} quelconques	$\phi_{xx} = e^{-a t }$ ϕ_{bb} quelconque
$B_o(s)$	$2[\phi_{xx}(o) - \int_0^1 \phi_{xx}(\alpha T) d\alpha] + \phi_{bb}(o)$	$2[1 - \frac{1-e^{-aT}}{aT}] + \phi_{bb}(o)$
$B_{oc}(s)$	$2[\phi_{xx}(o) - 2\int_0^{1/2} \phi_{xx}(\alpha T) d\alpha] + \phi_{bb}(o)$	$2[1 - \frac{1-e^{-aT/2}}{aT/2}] + \phi_{bb}(o)$
$B_{il}(s)$	$\frac{5}{3} \phi_{xx}(o) + \frac{1}{3} \phi_{xx}(T)$ $-4\int_0^1 (1-\alpha) \phi_{xx}(\alpha T) d\alpha + \frac{2}{3} \phi_{bb}(o) + \frac{1}{3} \phi_{bb}(T)$	$\frac{5}{3} \phi_{xx}(o) + \frac{1}{3} e^{-aT} - 4 (\frac{1-e^{-aT}}{aT})$ $+4[\frac{1-(1+aT)e^{-aT}}{(aT)^2}] + \frac{2}{3} \phi_{bb}(o) + \frac{1}{3} \phi_{bb}(T)$

Notons d'une part que seul le bloqueur d'ordre zéro est réalisable physiquement en ligne, et d'autre part que la fonction d'autocorrélation des signaux traités n'a besoin d'être connue qu'au plus dans l'intervalle $[0, T]$.

III - APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PROCESSUS -

III-1 Position du problème

On considère un processus (continu) dont on suppose pouvoir mesurer les entrées (exactes) et les sorties (entachées d'une perturbation). A partir de ces données entrées-sorties, on se propose d'identifier le processus, c'est-à-dire, de lui associer un modèle mathématique dont il faudra estimer les paramètres.

Admettons, pour l'instant, que l'on cherche à déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système, en minimisant la somme des carrés de l'erreur entre modèle et processus (figure 6-a), ce qui se traduit par :

$$\min_{h(t)} E \left[\int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau - s(t) \right]^2 \quad (1-16)$$

Notre propos est de mettre en évidence les difficultés existantes et les erreurs commises lorsqu'on résout sur calculateur numérique l'optimisation définie à l'équation (1-16). On a coutume de reformuler le problème (figure 6-b), en considérant la recherche d'un modèle discret $k(jT)$. L'intégrale apparaît alors sous forme d'une somme, et par suite les données $x(t)$ et $s(t)$ n'interviennent qu'à des instants discrets. Le problème numérique à résoudre s'exprimera

dans les termes suivants :

$$\min_{\substack{k(jT) \\ j \in N}} E \left[\sum_{i=0}^{\infty} x(nT-iT) k(iT) - s(nT) \right]^2 \quad (1-17)$$

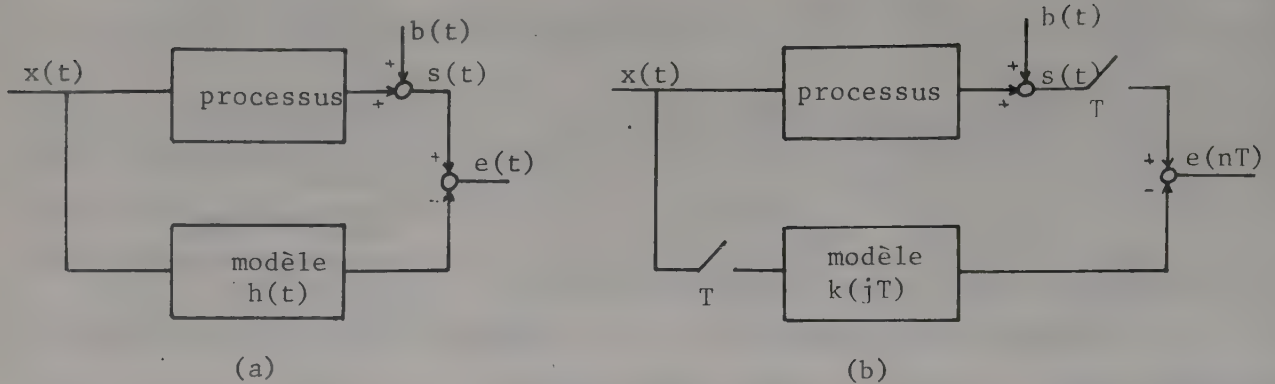


Fig. 6

III-2 Réponse impulsionnelle - Séquence de pondération

Nous distinguons volontairement le vocable "réponse impulsionnelle" relatif aux systèmes continus, de celui "séquence de pondération" associé aux systèmes discrets. Bien que jouant un rôle analogue (réponse à une impulsion), la séquence de pondération notée $k(jT)$ n'est pas, en général, (ainsi qu'on la considère souvent) l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $h(t)$.

Nous nous posons la question suivante : ayant identifié $k(jT)$, pouvons nous en déduire le modèle $h(t)$?

Nous exprimons ce "passage" du modèle discret au modèle continu dans les termes suivants : étant donné l'entrée $x(t)$ et connaissant $k(jT)$, on cherche à déterminer $h(t)$ tel que l'écart entre sortie continue $y(t)$ et sortie discrète $n(t)$ (figure 7) soit minimum (en moyenne quadratique) aux instants d'échantillonnage.

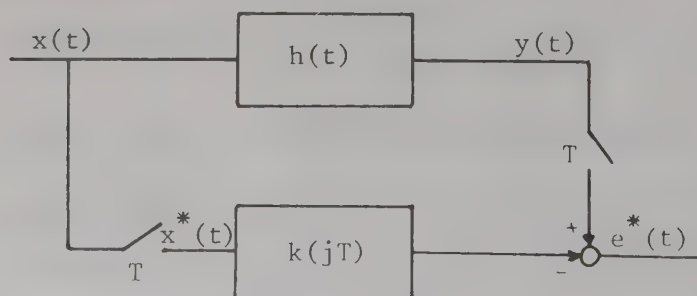


Fig. 7

L'écart aux instants d'échantillonnage $t = nT$ s'écrit :

$$e(t) = y(t) - \eta(t) \quad (1-18)$$

avec :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} k(jT) x(t-jT)$$

Nous cherchons une relation entre $h(t)$ et $k(jT)$ telle que $E[e(t)]^2$ soit minimum.

Posons :

$$S = E[y(t) - \eta(t)]^2 = A - 2B + C \quad ; \quad t = nT \quad (1-19)$$

Nous calculons successivement A, B et C

$$A = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha\right] \quad ; \quad t = nT$$

$$A = E\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) x(t-\alpha) h(\tau) h(\alpha) d\tau d\alpha\right]$$

$$A = \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(\tau-\alpha) h(\tau) h(\alpha) d\tau d\alpha$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau) h(\tau) d\tau \quad (1-20)$$

$$B = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau\right] \cdot \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t-iT) k(iT)\right] \quad ; \quad t = nT$$

$$B = E\left[y(nT) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(nT-iT) k(iT)\right]$$

$$B = E\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(nT) x(nT-iT) k(iT)\right]$$

$$B = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(iT) k(iT) \quad (1-21)$$

$$C = E\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(nT-iT) k(iT)\right] \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(nT-jT) k(jT)\right]$$

$$C = E\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(nT-jT) x(nT-iT) k(iT) k(jT)\right]$$

$$C = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[(i-j)T] k(iT) k(jT) \quad (1-22)$$

En remplaçant (1-20), (1-21), (1-22) dans (1-19), il vient :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau) h(\tau) d\tau - 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(iT) k(iT) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[(i-j)T] k(iT) k(jT) \quad (1-23)$$

Calculons donc :

$$\frac{\partial S}{\partial k(nT)} = - 2\phi_{xy}(nT) + 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(nT-iT) k(iT) = 0$$

$$\phi_{xy}(nT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(nT-iT) k(iT) \quad (1-24)$$

et de même :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k(nT) \partial k(mT)} = 2\phi_{xx}(nT-mT) = Q_{m,n} \quad (1-25)$$

La matrice $Q_{m,n}$ est une matrice de covariance, symétrique, définie positive, par conséquent, le point stationnaire est un minimum.

Compte-tenu de (1-23) et (1-24), il vient :

$$S_{\min} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau) h(\tau) d\tau - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(iT) k(iT) \quad (1-26)$$

L'équation (1-24) peut se mettre sous une autre forme en explicitant $\phi_{xy}(nT)$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(nT-\tau) h(\tau) d\tau = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(nT-iT) k(iT) \quad (1-27)$$

qui définit une relation implicite entre $h(t)$ et $k(jT)$. L' "équivalence" entre modèle continu et discret, telle que nous l'avons formulée, assure donc la conservation des propriétés relatives aux fonctions d'auto et inter-corrélation définies à l'équation (1-10).

On peut rendre explicite la relation (1-27) ; en passant aux transformées de Laplace il vient :

$$\Phi_{xx}(s) \cdot H(s) = K^*(s) \Phi_{xx}^*(s)$$

$$H(s) = \frac{K^*(s) \cdot \Phi_{xx}^*(s)}{\Phi_{xx}(s)}$$

En prenant la transformée inverse, on obtient :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K^*(s) \cdot \Phi_{xx}^*(s)}{\Phi_{xx}(s)} \right] \quad (1-28)$$

Cette dernière équation ne présente qu'un intérêt formel et n'est

vouée, au même titre que l'équation (1-27), à aucune application numérique, sauf dans le cas particulier où $\phi_{xx}(\tau)$ est une impulsion de Dirac $\delta(t)$.

De (1-27) on déduit alors immédiatement :

$$h(nT) = k(nT) \quad (1-29)$$

La séquence de pondération est alors rigoureusement l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle. Cette exception étant faite, on retient que le modèle continu que l'on pourrait déduire du modèle discret, dépend étroitement de la fonction d'autocorrélation de la commande à partir de laquelle a été identifié ce dernier. Il sera en général pratiquement impossible d'en préciser numériquement l'influence.

III-3 Approximation de l'intégrale de convolution

Nous allons reconsidérer le problème précédent d'un point de vue peut être moins rigoureux mais conduisant à des résultats plus utilisables.

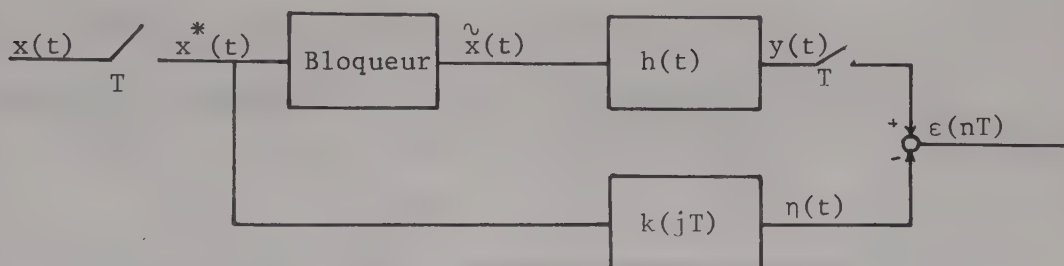


Fig. 8

Examinons le schéma fonctionnel de la figure 8.

La présence de l'ensemble échantillonneur plus bloqueur introduit une erreur (§ 2-3) de sorte que modèles discret et continu ne subissent pas la même excitation. Cependant, deux arguments militent en la faveur de ce schéma. D'une part, on peut déduire une relation simple entre $h(t)$ et $k(jT)$ annulant l'erreur $\epsilon(nT)$ dans le cas de bloqueur d'ordre zéro ; d'autre part, lorsque l'on met en oeuvre une commande numérique du processus, celle-ci s'avère souvent du type en "escalier" ; si les changements de niveau ont lieu à des instants $t_k = kT$ les signaux $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ sont alors confondus. Par suite, la relation que l'on peut déduire entre $h(t)$ et $k(jT)$ n'est entachée d'aucune erreur.

Nous allons considérer successivement le bloqueur d'ordre zéro, non compensé, puis compensé.

III-3-1 Bloqueur d'ordre zéro

Par définition on a :

$$\tilde{x}(t) = x(nT), \quad \forall t \in]nT, (n+1)T] \quad (1-30)$$

Il vient alors :

$$y(nT) = \sum_{j=1}^{\infty} x[(n-j)T] \int_{(j-1)T}^{jT} h(\tau) d\tau \quad (1-31)$$

D'autre part, pour le modèle discret, nous avons :

$$\eta(nT) = \sum_{j=0}^{\infty} x[(n-j)T] k(jT) \quad (1-32)$$

L'erreur $\epsilon(nT)$ est nulle en posant :

$$k(jT) = \int_{(j-1)T}^{jT} h(\tau) d\tau \quad \forall j \geq 1 \quad (1-33)$$

On a tracé figure 9 l'impulsion unitaire avant et après blocage.



Fig. 9

Notons avant de poursuivre que le terme $k(0)$ identifié est toujours nul, étant donnée la nature de l'impulsion $\tilde{x}(t)$. Pour illustrer cette remarque, on a tracé, figure 10, conjointement la réponse $y(t)$, du système continu, au "créneau" $\tilde{x}(t)$ (figure 9) et la séquence $k(jT)$ compte tenu de (1-33). Le cas (a) correspond à un système du 1er ordre (à transmission instantanée), la figure 10-b correspond à un système du 2ème ordre stable.



Fig. 10

L'ordonnée de $k(jT)$ notée à la figure 10 est égale à l'aire hachurée sous la courbe $y(t)$ et limitée par les verticales $t_0 = (j-1)T$ et $t_1 = jT$, en accord avec l'équation (1-33).

Considérons maintenant un signal $x(t) = 1 \quad \forall t$.

Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}
 y(nT) &= \sum_{j=1}^n k(jT) \\
 y(nT) &= \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)T}^{jT} h(\tau) d\tau \\
 y(nT) &= \int_0^{nT} h(\tau) d\tau \quad (1-34)
 \end{aligned}$$

Soit $v(t)$ la réponse indicielle du système (continu)

$$v(t) \triangleq \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (1-35)$$

De l'équation (1-34) on déduit :

$$v(nT) = y(nT) \quad (1-36)$$

Cette dernière équation traduit le fait que dans l'hypothèse de fonctionnement adopté, équation (1-30), la réponse indicielle discrète est exactement la discrétisation de la réponse indicielle continue.

Par suite, étant donnée la nature de l'impulsion unitaire $\tilde{x}(t)$ (figure 9), on en déduit que la séquence de pondération $k(jT)$ est l'échantillonnage de $[v(t) - v(t-T)]$.

III-3-2 Bloqueur d'ordre zéro compensé

Par définition on a :

$$\tilde{x}(t) = x(nT), \quad \forall t \in]nT - \frac{T}{2}, nT + \frac{T}{2}] \quad (1-37)$$

Par un calcul immédiat on obtient :

$$y(nT) = x(nT) \int_0^{T/2} h(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} x[(n-j)T] \int_{(j-\frac{1}{2})T}^{(j+\frac{1}{2})T} h(\tau) d\tau \quad (1-38)$$

En identifiant (1-38) à l'équation de convolution discrète (1-32), il vient :

$$\begin{aligned}
 k(0) &= \int_0^{T/2} h(\tau) d\tau \\
 k(jT) &= \int_{(j-\frac{1}{2})T}^{(j+\frac{1}{2})T} h(\tau) d\tau, \quad j \geq 1 \quad (1-39)
 \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse définie par l'équation (1-37), on a tracé, figure 11, l'impulsion unitaire avant et après blocage.



Fig. 11

Notons, dans ce cas, que le terme $k(0)$ ne peut être nul, ce qui est naturel puisque l'impulsion $\tilde{x}(t)$ commence avant $t = 0$. Un raisonnement, analogue à celui précédemment utilisé, permet de montrer que la séquence de pondération est l'échantillonnage du signal $[v(t+\frac{T}{2}) - v(t-\frac{T}{2})]$; de même la réponse indicielle discrète $\sum_{j=1}^n k(jT)$ est l'échantillonnage de la réponse indicielle (continue) avancée de $\frac{T}{2}$, soit $v(t+\frac{T}{2})$.

III-3-3 Relation approchée entre $h(t)$ et $k(jT)$

Dans les deux cas que nous venons d'analyser, la relation entre $k(jT)$ et $h(t)$ fait intervenir le calcul d'une intégrale, équations (1-33) et (1-39). Une approximation classique consiste à supposer $h(\tau)$ constant dans l'intervalle d'intégration.

L'équation (1-39) réalise l'hypothèse la plus favorable à cette approche.

D'où il vient :

$$h(jT) \approx \frac{1}{T} k(jT) \quad (1-40)$$

Un exemple simple va nous permettre de préciser la nature de cette approximation.

Considérons un système du premier ordre de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}$$

Calculons l'intégrale :

$$I = \int_{(j-\frac{1}{2})T}^{(j+\frac{1}{2})T} h(\tau) d\tau = e^{-(j-\frac{1}{2})\frac{T}{5}} (1 - e^{-\frac{T}{5}})$$

que l'on peut approcher par :

$$I' = \frac{T}{5} e^{-j\frac{T}{5}}$$

Nous représentons figure 12 la signification respective de I et I'.



Fig. 12

L'approximation sera d'autant meilleure que T sera petit vis-à-vis de la constante de temps du système. L'expérience montre qu'un rapport de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{10}$ est très satisfaisant. Posons $T = 1$; il vient :

$$I = 0,18127 e^{-(j-\frac{1}{2})\frac{T}{5}}$$

$$I' = 0,18096 e^{-(j-\frac{1}{2})\frac{T}{5}} = 0,2 e^{-j\frac{T}{5}}$$

I (erreur de 0,17 %)

Portons notre attention sur le calcul du premier point $k(o)$.

$$k(o) = \int_0^{T/2} h(t) dt = (1 - e^{-\frac{T}{10}}) = 0,09516$$

Etant donné que $h(t)$ est nulle pour t négatif, il convient de corriger l'approximation du terme $k(o)$ par un facteur $\frac{1}{2}$ dont l'interprétation géométrique est donnée figure 13. Notons que ce même facteur peut être introduit d'une façon différente [8].

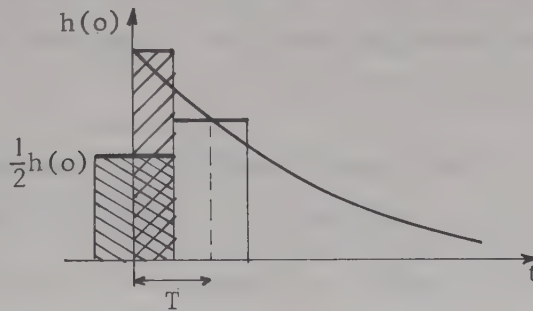


Fig. 13

Il vient alors :

$$h(o) \approx \frac{2}{T} k(o) \quad (1-41)$$

Alors que l'approximation avec un pas $T = 1$ était excellente précédemment, il en est tout autrement pour $k(o)$ et $h(o)$. Le résultat de l'intégrale

$$\int_0^{T/2} h(\tau) d\tau = 0,09516$$

est à comparer avec l'approximation

$$h(0) \cdot \frac{T}{2} = 0,1$$

Il peut donc s'avérer nécessaire d'utiliser un premier pas d'échantillonnage éventuellement beaucoup plus fin sans pour autant modifier le reste de l'échantillonnage de la courbe. Dans l'exemple qui nous occupe, on a résumé dans le tableau suivant l'évolution de l'erreur en fonction de T.

T	1	0,5	0,1	0,01
$1 - e^{-\frac{T}{10}}$	0,09516	0,04877	0,00995	0,00100
$h(0) \frac{T}{2}$	0,1	0,05	0,01	0,001
erreur %	4,8 %	2,6 %	0,5 %	~ 0

Considérons maintenant un système à transmission non instantanée, stable. Si les constantes de temps du système sont du même ordre de grandeur, le pas d'échantillonnage peut être choisi dans les mêmes conditions que précédemment, et on utilisera l'expression (1-40). En vertu de la remarque faite au paragraphe 3-3-2, le premier point $k(0)$ ne sera pas pris en considération et on posera simplement $h(0) = 0$.

Le problème n'est cependant pas toujours aussi simple quand le processus possède, parmi ses constantes de temps, une qui soit beaucoup plus petite que les autres. Prenons par exemple le système du second ordre :

$$h(t) = e^{-0,1t} - e^{-t}$$

Supposons que nous ayons identifié le processus avec un pas d'échantillonnage $T=2$, soit 5 fois plus petit que la plus grande constante de temps.

Le tableau ci-après, se rapportant à cet exemple, présente d'abord les valeurs exactes de $h(t)$, puis les valeurs de $k(jT)$ déduites des formules (1-39) (théoriquement obtenues par déconvolution numérique); il donne également les valeurs de $h(t)$ déduites du modèle discret en appliquant les formules (1-40) et (1-41).

On trouvera les graphes correspondant figure 14.

t	0	1	2	3	4	6	8
h(t)	0	0,53695	0,68339	0,69103	0,65201	0,54634	0,44901
k(jT)	0,31951		1,32210		1,29983	1,09363	0,89937
$\sim h(t)$	$\left\{ \frac{0,31951}{0} \right.$		0,66105		0,64991	0,54681	0,44968

On voit que l'approximation donnée par la formule (1-40) est d'autant meilleure que t augmente, c'est-à-dire au fur et à mesure que diminue l'influence de la constante de temps égale à 1. D'autre part, l'indétermination portant sur h(0) ne peut être levée que si l'on sait à priori que le système est à transmission instantanée ou non.

L'emploi d'un pas trop grand peut dans la pratique conduire quelquefois à des confusions entre modèle du premier et deuxième ordre. Cette remarque constitue une motivation supplémentaire pour opérer un échantillonnage plus fin en début de la réponse, permettant à la fois une meilleure identification des dynamiques et un choix plus facile de la structure d'un modèle continu.

A titre d'application prenons cette fois un pas d'échantillonnage $T=0,2$ pour les 3 premiers points de la séquence de pondération.

t	0	0,2	0,4
h(t)	0	0,16147	0,29047
k(jT)	0,0044	0,0320	0,0580
$\sim h(t)$	$\left\{ \frac{0}{0,044} \right.$	0,160	0,290

Les résultats obtenus laissent, cette fois, présager la nature du système. Il est bien évident que plus le pas d'échantillonnage sera petit, plus fine sera la représentation du système continu. Nous verrons cependant, au chapitre suivant, qu'en voulant trop diminuer l'erreur due à l'échantillonnage surviennent d'autres difficultés pouvant remettre en cause la signification même des résultats.

Au cours de ce paragraphe, nous avons vu qu'un choix adéquat de T devrait être adopté en fonction des constantes de temps du système. Ces dernières sont bien sûr, à priori, inconnues avant identification. Aussi, une solution,

peut-être un peu empirique, mais qui a fait ses preuves, consiste plutôt à déterminer le pas T à partir du temps de réponse ou mémoire du système (c'est-à-dire le temps nécessaire à l'extinction des transitoires), sachant qu'on s'impose un nombre de pas, par exemple compris entre 20 et 50. La mémoire du système est elle-même une quantité dont on peut facilement avoir un ordre de grandeur, ou bien, que l'on considère comme une donnée du problème, au même titre que le degré des équations différentielles du processus, lorsqu'on estime les paramètres d'un tel modèle.

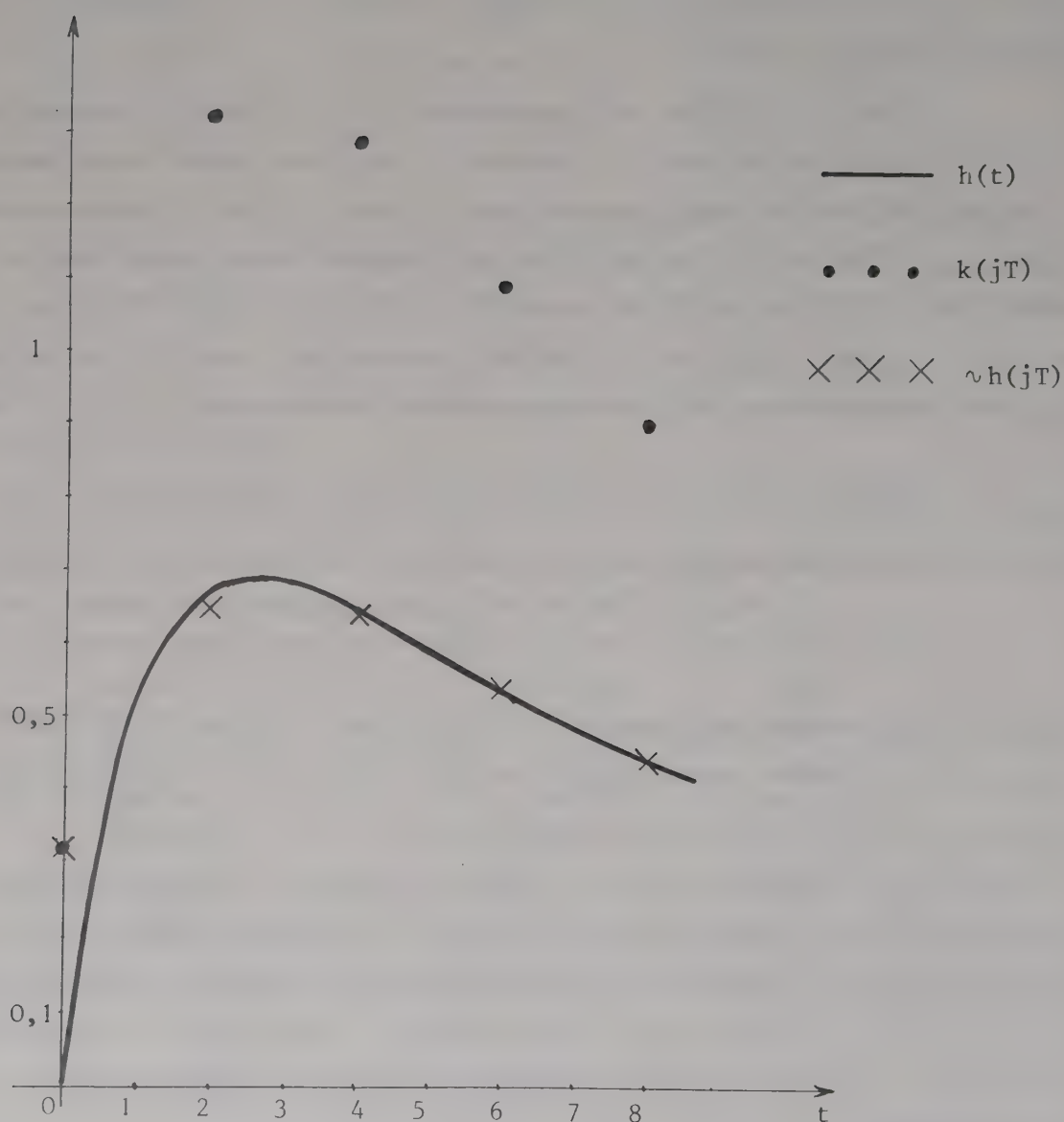


Fig. 14

Chapitre 2

IDENTIFICATION ET ESTIMATION PARAMETRIQUE

Nous développons, au cours de ce chapitre, l'aspect numérique et statistique d'algorithmes d'identification de séquences de pondération. Après avoir souligné divers aspects de la méthode des moindres carrés, nous traitons quelques applications de la théorie de l'estimation, nous permettant, d'une part, de justifier le bien fondé de certaines hypothèses que l'intuition pouvait nous dicter, et, d'autre part, d'élaborer des méthodes plus générales dont on peut définir l'optimalité dans des conditions données.

A la lumière de ces différents résultats (numériques et statistiques), nous introduirons dans un dernier paragraphe quelques remarques complémentaires concernant l'estimation de la réponse impulsionnelle à partir de la séquence de pondération.

I - INTRODUCTION -

Au cours du précédent chapitre, nous avons mis en évidence la distinction à faire entre la réponse impulsionnelle se rapportant aux systèmes continus, et la séquence de pondération ayant trait aux systèmes discrets. En raison du caractère numérique des algorithmes que nous considérons, et, par suite, de l'échantillonnage indispensable au traitement des informations, nous employons le vocable "séquence de pondération" pour évoquer le modèle estimé.

Il nous paraît souhaitable, pour clarifier la présentation de ce problème, d'opérer en deux temps. Nous supposerons d'abord que le processus testé est intrinsèquement discret, puis on déterminera si nécessaire une réponse impulsionnelle approchée à partir de la séquence de pondération estimée (§ III ch.1).

C'est donc en termes de système discret que nous développerons au cours de ce chapitre la mise en oeuvre d'algorithmes d'identification. Cette approche nous permettra de parler sans ambiguïté de l'optimalité (éventuelle) des résultats obtenus. Nous nous étendrons assez longuement sur la méthode des moindres carrés. Dans un contexte moins général (variables gaussiennes) nous serons amenés à parler successivement de la méthode du maximum de vraisemblance et de l'estimation de Bayes. Au cours de ces différents paragraphes, nous nous efforcerons de

mettre en évidence une certaine unicité dans le formalisme des résultats.

Nous terminerons par quelques remarques concernant l'influence de la nature du signal d'entrée sur l'identification et la précision que l'on peut atteindre dans l'estimation de la réponse impulsionnelle.

II - POSITION DU PROBLEME -

Pour ne pas alourdir inutilement cet exposé, nous supposerons au cours de ce chapitre que le processus testé ne possède qu'une entrée et qu'une sortie, ce qui ne restreint en rien la généralité des résultats. Le problème étant abordé dans un contexte discret, il s'agit d'identifier la séquence de pondération notée $\{h_t\}$, $t \in \mathcal{N}$. Cette séquence est caractérisée par un nombre infini de termes h_t appelés "coefficients de pondération" en raison du rôle qu'ils jouent dans l'équation de convolution discrète reliant l'entrée u_t à la sortie y_t . Cette équation s'écrit, rappelons le :

$$y_t = h_t * u_t \quad \longleftrightarrow \quad y_t = \sum_{j=1}^{\infty} h_j u_{t-j+1} \quad \dagger\dagger \quad (2-1)$$

Par la suite, nous supposerons que le système est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que l'on a :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h_j| < \infty \quad (2-2)$$

Cette hypothèse implique, en particulier, que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j = 0$$

Soit T l'intervalle de temps séparant h_j de h_{j+1} ($\forall j > 1$).

Pour de tels systèmes, on définit habituellement, dans un contexte physique, un temps d'extinction des transitoires, noté mT . Cette quantité n'est autre que la mémoire approchée du système qui peut alors être représenté par un nombre fini de coefficients de pondération.

La sortie y_t s'écrit dans ces conditions :

$$y_t = \sum_{j=1}^m h_j u_{t-j+1} \quad (2-3)$$

† La notation $*$ désigne ici la convolution discrète de séquences définies par leur terme général.

†† Nous utilisons un indice j strictement positif pour h_j , par analogie au langage FORTRAN utilisé dans les programmes.

Sachant que :

$$h_j \sim 0, \forall j > m$$

Une telle approximation est absolument légitime étant donné la précision finie à la fois des calculs et des mesures. C'est donc l'estimation de ces m paramètres ($h_j, j = 1, 2, \dots, m$) que l'on se propose d'étudier. Examinons le schéma fonctionnel de la figure 1. Nous y définissons les données du problème à savoir l'entrée du processus u_t et sa sortie s_t que l'on suppose entachée d'une erreur (ou bruit) inconnue. Il s'agit alors d'élaborer des méthodes permettant de construire le "meilleur" estimateur possible en fonction des informations connues ou des hypothèses faites. Selon leur nature, il découlera des problèmes distincts exigeant des solutions différentes qui sont l'objet des paragraphes suivants.

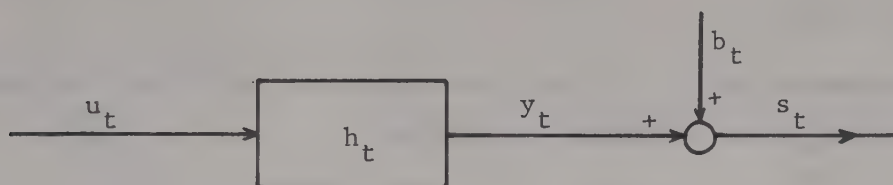


Fig. 1

III - LA METHODE DES MOINDRES CARRES -

Nous supposons que les seules informations dont on dispose sont représentées par les mesures (u_t, s_t) en nombre $N > m$ ($t = 1, 2, \dots, N$). De plus on admet que les perturbations agissant sur la sortie ne sont pas susceptibles d'une représentation probabiliste, ou que celle-ci est inconnue.

Dans ces conditions, il paraît raisonnable de choisir comme critère de ressemblance entre processus et modèle l'écart entre leur sortie respective s_t et y_t que nous définissons par :

$$\varepsilon_t = s_t - y_t$$

Considérons maintenant un vecteur erreur $\underline{\varepsilon}$ de composantes ε_t ($t=1, \dots, N$). Intuitivement, un "bon" modèle sera celui qui minimise une certaine norme L_p de l'erreur $\underline{\varepsilon}$. Rien ne nous permet de choisir à priori une norme plutôt qu'une autre. Cependant, le choix de la norme L_2 (norme euclidienne), habituellement adoptée, a des motivations précises, notamment :

- Il conduit ici à la minimisation d'une forme quadratique, c'est-à-dire à la résolution d'un système linéaire (équations normales), qui, sur le plan théorique, est une opération simple.

- Les sommes de carrés sont fréquemment l'objet de certaines interprétations physiques telles moment d'inertie, notion de variance, etc...

L'estimation obtenue en minimisant $||\underline{\varepsilon}||^2$ est précisément celle des "moindres carrés" $|1|$.

Revenons maintenant à notre problème défini au paragraphe précédent.

En utilisant les notations matricielles suivantes :

$$\underline{u}_t^T = [u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-m+1}] \quad ; \quad t = 1, 2 \dots N$$

$$\underline{h}^T = [h_1, h_2, \dots, h_m]$$

L'équation du système (2-3) devient en admettant qu'il est exactement représenté par $\underline{h}$:

$$y_t = \underline{u}_t^T \underline{h} \quad ; \quad t = 1, 2 \dots N \quad (2-4)$$

L'estimation de $\underline{h}$ telle que nous venons de la définir au sens des moindres carrés est celle qui minimise la quantité :

$$Q = \sum_{t=1}^N (s_t - \underline{u}_t^T \underline{h})^2 \quad (2-5)$$

En regroupant sous forme matricielle les N équations (2-4), celles-ci s'écrivent :

$$\underline{y} = U \underline{h} \quad (2-6)$$

où la matrice U et le vecteur $\underline{y}$ sont définis par :

$$U = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & u_1 & & \\ \vdots & \vdots & & u_1 \\ \vdots & \vdots & & u_2 \\ u_N & u_{N-1} & \dots & u_{N-m+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ \\ \\ \vdots \\ \vee \end{matrix} \quad N \quad ; \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

< ----- >
m

en supposant que le signal d'entrée u_t est nul avant l'instant initial $t = 1$.

Dans le cas contraire, l'estimation des conditions initiales peut se faire par simple lecture des données u_t (qui étaient supposées mesurées sans erreur), ce qui revient à considérer $t = m$ comme nouvel instant initial pour l'estimation.

La matrice U s'écrirait alors :

$$U = \begin{bmatrix} u_m^T \\ u_{m+1}^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_m & u_{m-1} & \dots & u_2 & u_1 \\ u_{m+1} & u_m & \dots & u_2 & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_N & \dots & \dots & u_{N-m+1} & u_{N-m+2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ \\ \\ \vee \end{matrix} \begin{matrix} N-m+1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

<----->
m

En adoptant ces notations, l'expression (2-5) devient :

$$Q = ||\underline{s} - U \underline{h}||^2 \quad (2-7)$$

avec $\underline{s}^T = [s_1, s_2, \dots, s_N]$

A partir de l'expression (2-7) on peut déterminer le minimum cherché en dérivant Q par rapport à l'inconnue cherchée $\underline{h}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{h}} = 2[-U^T \underline{s} + U^T U \underline{h}]$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \underline{h}} \right|_{\underline{h}=\hat{\underline{h}}} = \underline{0}$$

$$(U^T U) \hat{\underline{h}} = U^T \underline{s} \quad (2-8)$$

La condition précédente n'étant que nécessaire, calculons la matrice des dérivées secondes.

$$\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial h_i \partial h_j} \right] = 2 U^T U \quad (2-9)$$

Dans l'hypothèse où la matrice U est de rang maximum, c'est-à-dire de rang m, la matrice $U^T U$ est définie positive, auquel cas la solution $\hat{\underline{h}}$ donnée par l'équation (2-8) correspond bien à un minimum ; soit :

$$\hat{\underline{h}} = [U^T U]^{-1} U^T \underline{s}$$

Dans le cas contraire, le système (2-8) ne conduit pas à une solution unique puisque le rang de $U^T U$ est inférieur à m. En général, on convient de prendre la solution de norme L_2 minimale, c'est-à-dire celle obtenue en utilisant la pseudo inverse de U notée U^+ , [2].

Il vient :

$$\hat{\underline{h}} = U^+ \underline{s} \quad (2-10)$$

Notons que la pseudo inverse de U lorsque rang U = m est donnée par $(U^T U)^{-1} U^T$, par suite les solutions $\hat{\underline{h}}$ et $\tilde{\underline{h}}$ sont identiques, ce qui est bien naturel.

III-1 Interprétation géométrique de la méthode

Considérons un espace à N dimensions ; dans cet espace on définit un point P de composantes $(s_1, s_2, \dots, s_N)$ qui représente la sortie (mesurée) du processus, et un point M de composantes $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ associé à la sortie du modèle. La relation (2-6) traduit le fait que le point M appartient aussi à un hyperplan H engendré par les colonnes de la matrice U , donc de dimension égale au rang de cette matrice, (figure 2).

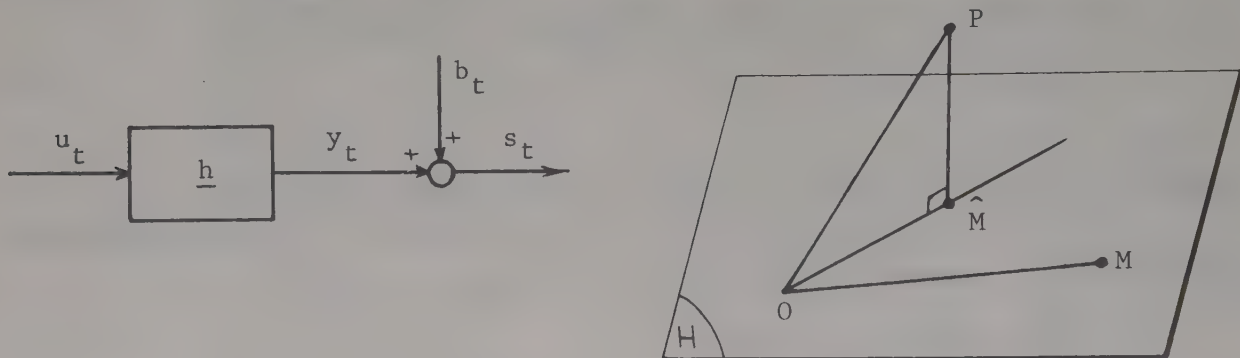


Fig. 2

La solution $\hat{\underline{h}}$ des moindres carrés est celle qui minimise $||\underline{s} - \underline{y}||^2$, c'est-à-dire le carré de la distance entre le point P et un point M appartenant à la fois à l'espace R^n et à l'hyperplan H . Par conséquent, la sortie du modèle optimal $\hat{\underline{y}} = U \hat{\underline{h}}$, représentée par le point $\hat{M}$, est la projection de P sur l'hyperplan H .

Nous allons retrouver ces résultats analytiquement à partir de la définition de $\hat{\underline{h}}$. Nous supposons ici que le rang de la matrice U est égal à m .

De l'expression (2-8), il vient :

$$\hat{\underline{h}} = (U^T U)^{-1} U^T \underline{s} \implies \hat{\underline{y}} = U (U^T U)^{-1} U^T \underline{s}$$

La matrice $U (U^T U)^{-1} U^T$ est un opérateur qui projette un point P appartenant à R^n dans le sous-espace engendré par la matrice U . Pour le vérifier nous allons montrer que le vecteur $\underline{s} - U \hat{\underline{h}}$ est perpendiculaire au vecteur $U \hat{\underline{h}}$.

On a :

$$\begin{aligned} ||\underline{s} - U \hat{\underline{h}}||^2 &= \underline{s}^T \underline{s} + \hat{\underline{h}}^T U^T U \hat{\underline{h}} - \underline{s}^T U \hat{\underline{h}} - \hat{\underline{h}}^T U^T \underline{s} \\ ||\underline{s} - U \hat{\underline{h}}||^2 &= ||\underline{s}||^2 + ||U \hat{\underline{h}}||^2 - (U^T \underline{s})^T \hat{\underline{h}} - \hat{\underline{h}}^T (U^T \underline{s}) \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation (2-8), il vient :

$$\begin{aligned} ||\underline{s} - U \hat{\underline{h}}||^2 &= ||\underline{s}||^2 + ||U \hat{\underline{h}}||^2 - \hat{\underline{h}}^T U^T U \hat{\underline{h}} - \hat{\underline{h}}^T U^T U \hat{\underline{h}} \\ ||\underline{s} - U \hat{\underline{h}}||^2 &= ||\underline{s}||^2 + ||U \hat{\underline{h}}||^2 - 2 ||U \hat{\underline{h}}||^2 \\ ||\underline{s} - U \hat{\underline{h}}||^2 &= ||\underline{s}||^2 - ||U \hat{\underline{h}}||^2 \end{aligned} \tag{2-11}$$

En se reportant à la figure 2, l'équation (2-11) devient :

$$P \hat{M}^2 = O P^2 - O \hat{M}^2 \quad (2-12)$$

dont on déduit que $P \hat{M}$ est perpendiculaire à $O \hat{M}$, ce qu'il fallait démontrer.

III-2 Algorithmes de résolution numérique

Nous supposons par la suite que la matrice U est de rang maximum, ce qui est théoriquement toujours réalisé, sauf si le signal u_t est constant ($\forall t$), cas trivial pour lequel on ne saurait qu'identifier le gain statique du processus.

Avant d'aborder les différentes méthodes numériques que nous envisageons, nous rappelons la définition du nombre de condition $\xi(A)$ d'une matrice quelconque A .

$$\xi(A) \triangleq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &\triangleq \max_{\underline{x}} \frac{\|A \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \\ \sigma_2 &\triangleq \min_{\underline{x}} \frac{\|A \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \end{aligned} ; \underline{x} \neq 0$$

Les quantités σ_1 et σ_2 désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice A .

III-2-1 Méthode de Choleski

Nous avons vu que l'estimation $\hat{h}$ est solution du système linéaire (2-8), p33, caractérisé par une matrice symétrique définie positive ($U^T U$). La résolution numérique de ce système par la méthode de Choleski est basée sur cette propriété.

On démontre [3] que toute matrice symétrique définie positive peut se factoriser en :

$$A = L \cdot L^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à éléments diagonaux positifs. La résolution du système $A \underline{x} = \underline{b}$ conduit alors à la résolution de 2 systèmes triangulaires :

$$(L L^T) \underline{x} = \underline{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \underline{y} = \underline{b} & \text{qui donne } \underline{y} \text{ connaissant } L \text{ et } \underline{b} \\ L^T \underline{x} = \underline{y} & \text{qui donne } \underline{x} \text{ connaissant } L^T \text{ et } \underline{y} \end{cases}$$

Nous chiffrerons le "coût" de cette méthode en notant qu'elle nécessite l'extraction de n racines carrés, et environ $\frac{n^3}{6}$ multiplications ; n étant la dimension de la matrice A .

Notons encore que la sensibilité de l'algorithme aux erreurs d'arrondi est proportionnelle à $\xi(A)$.

Faisons le décompte des opérations (multiplications) nécessaire au calcul de $\hat{h}$ selon l'équation (2-8) p 33.

Il faut environ $N.m$ multiplications pour former la matrice $(U^T U)$, si l'on remarque qu'il suffit de calculer la 1ère ligne (ou 1ère colonne) de cette matrice et que les suivantes s'en déduisent à un terme correctif près (propriété due à la forme particulière de la matrice U).

Le second membre $U^T \underline{s}$ est obtenu au prix de $N.m$ multiplications. Finalement le calcul de $\hat{h}$ nécessite environ m racines carrés, et $m(2N + \frac{m^2}{6})$ multiplications.

Notons que la mise en oeuvre sur calculateur de cette méthode est attrayante.

D'une part, la programmation est assez simple, d'autre part, seuls la matrice $U^T U$ et le vecteur $U^T \underline{s}$ doivent être disposés en mémoire centrale, par conséquent le nombre de mémoires à réserver est indépendant de N . En tenant compte de la symétrie de $U^T U$, celui-ci se réduit à $m(m+5)/2$ mots.

Cependant, il convient de remarquer que :

$$\xi(U^T U) = [\xi(U)]^2$$

par conséquent, la méthode sera peu performante si la matrice U est mal conditionnée.

III-2-2 Méthode de Householder

Nous avons vu, du point de vue stabilité numérique, que l'algorithme de Choleski faisait intervenir le carré du nombre de condition de U ; il serait donc souhaitable de disposer d'une méthode ne faisant pas intervenir la matrice $U^T U$. Pour cela nous allons calculer directement $\hat{h}$ sachant qu'il doit minimiser la quantité $||\underline{s} - U \underline{h}||^2$.

A cet effet, nous allons factoriser la matrice U de la manière suivante :

$$N \updownarrow \begin{matrix} \xleftrightarrow{m} \\ U \end{matrix} \xleftrightarrow{m} W \cdot \begin{bmatrix} V \\ - \\ O \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow N-m \end{matrix} \quad (2-13)$$

où W est une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $W^T W = \mathbf{1}$, et V une matrice triangulaire supérieure. Il vient en remplaçant (2-13) dans (2-7), p. 33 :

$$Q = (\underline{s} - W \begin{bmatrix} \underline{v} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \underline{h})^T (\underline{s} - W \begin{bmatrix} \underline{v} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \underline{h})$$

$$Q = (W^T \underline{s} - \begin{bmatrix} \underline{v} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \underline{h})^T (W^T \underline{s} - \begin{bmatrix} \underline{v} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \underline{h})$$

Compte tenu que $W^T W = 1$.

En posant :

$$W^T \underline{s} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 \\ - \\ \underline{s}_2 \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$Q = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 & - & \underline{v} & \underline{h} \\ - & \underline{s}_2 & - & - \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{s}_1 & - & \underline{v} & \underline{h} \\ - & \underline{s}_2 & - & - \end{bmatrix}$$

Il s'en suit que Q est minimum lorsque l'on a :

$$\underline{v} \hat{\underline{h}} = \underline{s}_1 \quad (2-14)$$

et vaut $Q_{\min} = ||\underline{s}_2||^2$.

Une fois la factorisation (2-13) effectuée, on obtient directement l'estimation $\hat{\underline{h}}$ en résolvant le système triangulaire (2-14).

Un algorithme particulièrement efficace, basé sur les transformations de Householder, permet d'obtenir la factorisation (2-13).

Le principe de la méthode est le suivant. On génère une suite de systèmes $U^{(r)} \underline{h} = \underline{s}^{(r)}$ de telle sorte qu'à la $r^{\text{ème}}$ étape le système ait la forme suivante :

$$U^{(r)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} U_{1,1}^{(2)} & \dots & U_{1,r-1}^{(2)} & U_{1,r}^{(2)} & \dots & U_{1,m}^{(2)} \\ & U_{2,2}^{(3)} & U_{2,r-1}^{(3)} & U_{2,r}^{(3)} & \dots & U_{2,m}^{(3)} \\ & & \vdots & & & \\ & & U_{r-1,r-1}^{(r)} & U_{r-1,r}^{(r)} & \dots & U_{r-1,m}^{(r)} \\ \hline & & & U_{r,r}^{(r)} & & U_{r,m}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \\ & & & U_{N,r}^{(r)} & & U_{N,m}^{(r)} \end{array} \right] ; \underline{s}^{(r)} = \begin{bmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(3)} \\ \vdots \\ s_{r-1}^{(r)} \\ \hline s_r^{(r)} \\ \vdots \\ s_N^{(r)} \end{bmatrix}$$

Le passage d'une itération à la suivante est obtenu par les relations :

$$U^{(r+1)} = H U^{(r)}$$

$$\underline{s}^{(r+1)} = H \underline{s}^{(r)}$$

où H est une matrice orthogonale élémentaire de la forme :

$$H = 1 - 2 \underline{a} \underline{a}^T ; ||\underline{a}|| = 1$$

calculée de telle sorte que la triangularisation se poursuive en laissant inchangées les r premières lignes de $U^{(r)}$ et $\underline{s}^{(r)}$.

En considérant que le système initial correspond à $r = 1$, on obtient pour $r = N$ un système de la forme désirée.

$$\begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \hat{h} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 \\ \vdots \\ \underline{s}_2 \end{bmatrix}$$

Cette méthode présente l'avantage, du point de vue numérique, de "travailler" directement sur la matrice U et non plus $U^T U$.

Il serait cependant imprudent de conclure que la sensibilité de la méthode dépend seulement de $\xi(U)$. On démontre [4] qu'il en est ainsi lorsque le système est compatible ($Q_{\min} = 0$) ou si $Q_{\min} \ll \xi(U)$; dans le cas contraire, un terme en $|\xi(U)|^2$ intervient dans le calcul de la sensibilité de l'algorithme. Cette méthode ne conduit donc pas systématiquement à de meilleures performances.

Du point de vue coût en opérations, le calcul de $\hat{h}$ nécessite environ $m^2(N + \frac{1}{2})$ multiplications et $(m-1)$ racines carrés. En ce qui concerne la mise en oeuvre, l'algorithme est un peu plus complexe mais surtout nécessite beaucoup de place en mémoire centrale puisque celle-ci doit contenir la matrice U , c'est-à-dire $N.m$ mots au lieu de $m(m+1)/2$. Cet inconvénient est d'autant plus sensible qu'en général N est largement supérieur à m .

III-2-3 Méthode récurrente

Dans le cas qui nous occupe, il est souhaitable de disposer d'une méthode à la fois peu sensible aux erreurs d'arrondi et ne nécessitant pas un volume mémoire trop important. La méthode que nous exposons maintenant à cet effet présente en outre l'avantage de conduire à une estimation en ligne de $\hat{h}$, c'est-à-dire au fur et à mesure que les données (u_t, s_t) arrivent, par opposition aux deux méthodes précédentes où l'estimation $\hat{h}$ était obtenue une fois que l'on disposait de toutes les données.

Considérons les k premières mesures de (u_t, s_t) , $t = 1, 2, \dots, k$. Nous supposons, pour l'instant, que k est supérieure (ou égale) à m . Nous

pouvons alors grouper les k premières équations (2-4), p32, sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{y}_k = U_k \underline{h} \quad (2-15)$$

avec :

$$U_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_k^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{y}_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Compte tenu des k premières mesures (u_t, s_t) , on peut calculer une estimation $\hat{\underline{h}}$ au sens des moindres carrés que nous noterons $\hat{\underline{h}}_k$ et qui est définie par :

$$\hat{\underline{h}}_k = (U_k^T U_k)^{-1} U_k^T \underline{s}_k \quad (2-16)$$

$$\text{où } \underline{s}_k^T = [s_1, s_2, \dots, s_k]$$

On définit de même l'estimation $\hat{\underline{h}}_{k+1}$ obtenue après k+1 mesures, soit :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = (U_{k+1}^T U_{k+1})^{-1} U_{k+1}^T \underline{s}_{k+1} \quad (2-17)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = (U_k^T U_k + \underline{u}_{k+1} \underline{u}_{k+1}^T)^{-1} (U_k^T \underline{s}_k + \underline{u}_{k+1} s_{k+1}) \quad (2-18)$$

En notant que :

$$U_{k+1} = \begin{bmatrix} U_k \\ \underline{u}_{k+1}^T \end{bmatrix}$$

Nous rappelons maintenant deux relations matricielles auxquelles nous nous référerons souvent :

$$(A + R S V)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} R (S^{-1} + V A^{-1} R)^{-1} V A^{-1} \quad (2-19)$$

$$(A + R S V)^{-1} R S = A^{-1} R (S^{-1} + V A^{-1} R)^{-1} \quad (2-20)$$

dont on trouvera la démonstration en annexe I.

Définissons une matrice P_k par $(U_k^T U_k)^{-1}$, il vient compte tenu de (2-17) et (2-18) :

$$P_{k+1} = (U_{k+1}^T U_{k+1})^{-1}$$

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + \underline{u}_{k+1} \underline{u}_{k+1}^T)^{-1}$$

+ Il est bien évident que la matrice qu'on noterait maintenant U_N est identique à la matrice U , définie p.32.

En appliquant la relation (2-19) avec $A = P_k^{-1}$; $R = \underline{u}_{k+1}$; $S = 1$ et $V = \underline{u}_{k+1}^T$, il vient :

$$P_{k+1} = P_k - P_k \underline{u}_{k+1} (1 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \underline{u}_{k+1}^T P_k$$

ou encore :

$$P_{k+1} = P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k \quad (2-21)$$

en posant :

$$K_k = P_k \underline{u}_{k+1} (1 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \quad (2-22)$$

qui en application de (2-20) s'écrit :

$$K_k = P_{k+1} \underline{u}_{k+1} \quad (2-23)$$

Reprenons l'équation (2-18) qui s'écrit maintenant, compte tenu de la définition de P_{k+1} et d'après la relation (2-21) :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = (P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k) (U_k^T \underline{s}_k + \underline{u}_{k+1}^T \underline{s}_{k+1})$$

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = P_k U_k^T \underline{s}_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k U_k^T \underline{s}_k + (P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k) \underline{u}_{k+1}^T \underline{s}_{k+1}$$

qui en utilisant (2-16) se simplifie en :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = \hat{\underline{h}}_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k + P_{k+1} \underline{u}_{k+1}^T \underline{s}_{k+1}$$

Il vient d'après (2-23) :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = \hat{\underline{h}}_k + K_k (\underline{s}_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k)$$

Finalement, on arrive à une formulation récurrente sans inversion de matrice ($\underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1}$ étant un scalaire) que l'on résume dans les équations (2-24) :

$$\begin{cases} K_k = P_k \underline{u}_{k+1} (1 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1} = P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k \\ \hat{\underline{h}}_{k+1} = \hat{\underline{h}}_k + K_k (\underline{s}_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k) \end{cases} \quad (2-24)$$

Il s'agit maintenant d'initialiser le procédé.

Rappelons que $P_k = (U_k^T U_k)^{-1}$, par conséquent, ce calcul ne peut être effectué que si $U_k^T U_k$ est de rang m ; il faut donc disposer d'au moins m mesures (c'est-à-dire $k > m$).

Soit k_0^+ la plus petite valeur de k pour laquelle on puisse calculer $P_{k_0} = (U_{k_0}^T U_{k_0})^{-1}$. Une première méthode consiste alors à utiliser les équations (2-24) pour $k > k_0$, initialisée par P_{k_0} , et $\hat{\underline{h}}_{k_0}$ déduite de l'équation (2-16)

† Théoriquement $k_0 = m$, mais, en raison d'erreur d'arrondi, k_0 peut être quelquefois supérieur à m .

Notons, lorsque $k_0 = m$, qu'il suffit simplement de résoudre le système $U_m \hat{h}_m = \underline{s}_m$.

Une deuxième solution consiste à employer les expressions (2-24) dès la première mesure, c'est-à-dire pour $k = 0$.

Il est alors nécessaire de se donner une valeur initiale $\underline{h}_0$ et P_0 . Il convient en l'occurrence de choisir :

$$\begin{aligned} \underline{h}_0 & \text{ quelconque fini (par exemple } \underline{0} \text{)} \\ P_0 & = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2-25)$$

On trouvera la démonstration en annexe II.

Du point de vue numérique, cette méthode est peu sensible aux erreurs d'arrondi, ceci étant principalement dû à l'emploi, comme variable interne, de l'estimation $\underline{h}_k$ elle-même. La mise en oeuvre est très simple mais l'algorithme nécessite un grand nombre d'opérations de l'ordre de $\frac{3}{2} N m^2$ multiplications. A cet égard, il est cependant difficile de le comparer aux méthodes précédentes puisqu'il fournit beaucoup plus d'informations (estimation de $\underline{h}$ au sens des moindres carrés à chaque nouvelle mesure). Notons à son actif que le volume de mémoire occupé par les variables est indépendant de N et identique à celui de la méthode de Choleski.

III-3 Aspect statistique des moindres carrés

Nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse sur la nature des perturbations b_t inconnues.

Considérons maintenant que b_t est une variable aléatoire pseudo blanche centrée, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} E(b_t) & = 0 \quad \forall t \\ E(b_i b_j) & = \sigma^2 \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kroneker}) \end{aligned}$$

Définissons le vecteur $\underline{b}$ par :

$$\underline{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_N]$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} E(\underline{b}) & = \underline{0} \\ E(\underline{b} \underline{b}^T) & = \sigma^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2-26)$$

L'équation du système s'écrit :

$$\underline{s} = U \underline{h} + \underline{b} \quad (2-27)$$

Il convient donc de considérer que les mesures $\underline{s}$ représentent la réalisation d'une variable aléatoire, par suite de la présence du terme $\underline{b}$. Il

s'en suit que l'estimateur $\hat{\underline{h}}$ devient une variable aléatoire qu'il ne faut d'ailleurs pas confondre avec l'inconnu $\underline{h}$ qui demeure déterministe.

Rappelons rapidement les propriétés de $\hat{\underline{h}}$.

On a :

$$\hat{\underline{h}} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{s}$$

$$\hat{\underline{h}} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T (\underline{U} \underline{h} + \underline{b})$$

$$\hat{\underline{h}} = \underline{h} + (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{b}$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres, compte tenu de (2-26) et en supposant que u_t et b_t sont indépendants, il vient :

$$E(\hat{\underline{h}}) = \underline{h} \quad (2-28)$$

L'estimateur $\hat{\underline{h}}$ est dit "sans biais".

Calculons maintenant la matrice de covariance de $\hat{\underline{h}}$:

$$\underline{V} = E(\hat{\underline{h}} - \underline{h})(\hat{\underline{h}} - \underline{h})^T$$

$$\underline{V} = E[(\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{b} \underline{b}^T \underline{U} (\underline{U}^T \underline{U})^{-1}]$$

$$\underline{V} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T [E(\underline{b} \underline{b}^T)] \underline{U} (\underline{U}^T \underline{U})^{-1}$$

Soit, d'après (2-26) :

$$\underline{V} = \sigma^2 (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \quad (2-29)$$

Rappelons les conditions d'excitation persistance d'ordre m d'un signal u_t [5] :

$$\bar{u} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k < \infty$$

$$R_u(i) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [(u_k - \bar{u})(u_{k+i} - \bar{u})] < \infty \quad (2-30)$$

$$[A]_{ij} \triangleq [R_u(i-j)] \quad i, j = 1, 2, \dots, m \text{ définie positive.}$$

Physiquement, ces conditions impliquent que u_t doit varier suffisamment autour d'une valeur moyenne finie et quel que soit t , de façon à pouvoir estimer les m paramètres du modèle (ici h_t).

D'après la définition de la matrice $\underline{U}$, p.32, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{U}^T \underline{U})_{ij} = N R_u(i-j) + N \bar{u}^2$$

En conséquence, la matrice $\underline{U}^T \underline{U}$ est infinie quand N est infini, et, par suite, la matrice de covariance $\underline{V}$ tend vers une matrice nulle. Sachant que

$\hat{\underline{h}}$ est sans biais on dit alors que $\hat{\underline{h}}$ est un estimateur "convergent".

La variance du bruit σ^2 a jusqu'ici été supposée connue. Si ce n'est pas le cas on montre [1] que :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-m} (\underline{s} - U \hat{\underline{h}})^T (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}) \quad (2-31)$$

est un estimateur sans biais de σ^2 .

Rappelons enfin le théorème suivant [6].

De toutes les estimations sans biais, fonctions linéaires des observations s_t , l'estimation des moindres carrés est celle qui a la plus petite variance.

Revenons maintenant à la formulation récurrente (§ III-2-3).

Posons cette fois :

$$P_k = \sigma^2 (U_k^T U_k)^{-1}$$

En appliquant les relations (2-19) et (2-20), il vient, d'une façon analogue au cas déterministe :

$$\begin{cases} K_k = P_k \underline{u}_{k+1} (\sigma^2 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1} = P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k \\ \hat{\underline{h}}_{k+1} = \hat{\underline{h}}_k + K_k (s_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k) \end{cases} \quad (2-32)$$

Ces équations sont identiques à (2-24) en notant cependant l'introduction du terme σ^2 dans l'expression de K_k . Il convient de souligner l'importance du point de vue probabiliste qui permet de donner une signification précise à la matrice P_k , à savoir celle de matrice de covariance de $\hat{\underline{h}}_k$ en raison de l'équation (2-29).

A ceci ajoutons les remarques suivantes :

- Parmi les estimations récurrentes de la forme :

$$\hat{\underline{h}}_{k+1} = \hat{\underline{h}}_k + K_k (s_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k)$$

La matrice de gain K définie précédemment est celle qui conduit à une estimation $\hat{\underline{h}}$ de variance la plus petite. Ce résultat se déduit directement du théorème précédent.

- La matrice gain K_k selon (2-32) étant mise sous la forme :

$$K_k = \frac{1}{\sigma^2} P_{k+1} \underline{u}_{k+1}$$

par application de la relation (2-20) ; on remarque alors que, pour σ donné,

plus la matrice de covariance P_k est importante, plus l'estimateur est "nerveux". Inversement, quand P_k est petit (estimation $\hat{h}_k$ précise) on attachera une importance moindre à l'écart éventuel entre sortie mesurée et prédite.

- Compte tenu de l'équation :

$$P_{k+1} = P_k - K_k \underline{u}_{k+1}^T P_k$$

on peut montrer que :

$$\text{Tr } P_{k+1} \leq \text{Tr } P_k$$

Il s'en suit une diminution de la variance à chaque nouvelle donnée, c'est-à-dire, une amélioration de l'estimation de $\underline{h}$. On retrouve la propriété de convergence ($\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$) caractéristique des moindres carrés.

- On peut, dès lors, considérer $\underline{h}_0$ et P_0 comme une estimation initiale accompagnée de sa matrice de covariance. Dans l'esprit de la méthode des moindres carrés on ne dispose d'aucune information a priori sur $\underline{h}$, nous traduisons ceci en prenant une valeur $\hat{\underline{h}}_0$ finie quelconque (en général nulle) à laquelle on associe une matrice de covariance diagonale (sinon quelle corrélation pourrait-on mettre ?) et de termes infinis, cette variance justifiant l'arbitraire de l'estimation initiale $\hat{\underline{h}}_0$. Nous retrouvons là les expressions (2-25), p.41.

III-4 Extension de la méthode à des bruits corrélés

L'hypothèse de bruits indépendants n'étant pas toujours réaliste, nous allons supposer maintenant que le bruit b_t est caractérisé par :

$$\begin{aligned} E(\underline{b}) &= \underline{0} \\ E(\underline{b} \underline{b}^T) &= B \end{aligned} \tag{2-33}$$

L'estimateur des moindres carrés est toujours sans biais, mais parmi les estimateurs, fonctions linéaires des observations, il n'est plus celui ayant la variance la plus petite.

Il convient non plus de minimiser la quantité Q définie en (2-5), p32 mais une somme de carrés pondérée par B^{-1} , soit Q' . La motivation de ce choix sera pleinement justifiée dans le cas de l'hypothèse gaussienne, (§ III-5) :

$$\begin{aligned} Q' &= \| \underline{s} - U \underline{h} \|_{B^{-1}} \\ Q' &= (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \end{aligned} \tag{2-34}$$

En annulant la dérivée de Q' par rapport à $\underline{h}$, il vient :

$$\hat{\underline{h}} = (U^T B^{-1} U)^{-1} U^T B^{-1} \underline{s} \tag{2-35}$$

On a immédiatement :

$$\left[\frac{\partial^2 Q'}{\partial h_i \partial h_j} \right] = 2 U^T B^{-1} U$$

Lorsque U est de rang m , cette matrice est définie positive et la solution (2-35) correspond bien à un minimum.

Un calcul immédiat montre que :

$$\begin{aligned} E(\hat{h}) &= \underline{h} \\ V &= E(\hat{h} - \underline{h})(\hat{h} - \underline{h})^T = (U^T B^{-1} U)^{-1} \end{aligned} \quad (2-36)$$

L'estimateur $\hat{h}$ est alors appelé estimateur de "Markov" et possède des propriétés analogues à celles des moindres carrés : convergence, estimateur linéaire de variance minimale, [7].

III-5 Environnement gaussien

Nous assimilons maintenant la perturbation b_t à une variable aléatoire gaussienne de densité de probabilité :

$$p(\underline{b}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{|B|}} \exp - \frac{1}{2} \underline{b}^T B^{-1} \underline{b} \quad (2-37)$$

que nous notons en abrégé :

$$\underline{b} = N(0, B)$$

Cherchons l'estimation $\underline{h}$ de vraisemblance maximale. Par définition, c'est celle qui rend l'observation s_t la plus probable. Pour cela, on calcule la densité de probabilité $p(\underline{s}/\underline{h})$; il vient, compte tenu de l'équation du système (2-27) p. 41 :

$$p(\underline{s}/\underline{h}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{|B|}} \exp - \frac{1}{2} (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h})$$

Soit L la fonction de vraisemblance définie par :

$$L = \text{Log } p(\underline{s}/\underline{h})$$

Nous avons immédiatement :

$$L = \text{constante} - \frac{1}{2} (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h})$$

L sera maximale pour :

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{h}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial h_i \partial h_j} \right] \text{ matrice définie négative}$$

c'est-à-dire lorsque la quantité Q' (2-34) sera minimale.

Dans l'hypothèse gaussienne, l'estimation du "maximum de vraisemblance" est donc confondue avec l'estimation de "Markov".

Rappelons la définition de la matrice d'information I, selon Fisher :

$$I = - E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial h_i \partial h_j} \right] \quad (2-38)$$

Soit ici :

$$I = U^T B^{-1} U$$

D'après (2-36), il vient :

$$I = V^{-1}$$

L'estimateur est alors dit "efficace", c'est-à-dire qu'il a une variance inférieure à celle de tout autre estimateur. De plus, il est "exhaustif".[†]

Remarquons que si le bruit b_t est indépendant et de variance σ^2 , on a alors $B = \sigma^2 \mathbf{1}$, la méthode du maximum de vraisemblance est alors formellement identique à celle des moindres carrés, tout en lui assurant de plus l' "efficacité" et l' "exhaustivité".

L'hypothèse gaussienne permet donc d'affirmer l'optimalité de l'estimateur $\hat{h}$. Plus précisément, toutes les informations reçues par l'intermédiaire des données (u_t, s_t) ont alors été utilisées et "résumées" dans le couple $(\hat{h}, V)$, (exhaustivité), de plus $\hat{h}$ étant efficace, sa variance est plus petite que celle de tout autre estimateur (sans se limiter aux fonctions linéaires des observations).

Notons enfin que l'estimateur $\hat{h}$ en tant que fonction linéaire de $\underline{s}$ est lui même gaussien ; $\hat{h} = N(h, V)$.

Nous résumons au tableau I suivant les principaux résultats acquis.

[†] La propriété d'exhaustivité est ici déduite de celle d'efficacité, la réciproque n'étant pas forcément vraie [6].

hypothèses sur $\underline{b}_t$	méthode	propriétés
aucune	moindres carrés $\hat{\underline{h}} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{s}$	minimise $ \underline{s} - \underline{U} \underline{h} ^2$ $\hat{\underline{h}}(\underline{s})$ linéaire
$E(\underline{b}) = \underline{0}$ $E(\underline{b} \underline{b}^T) = \sigma^2 \underline{1}$	moindres carrés $\hat{\underline{h}} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{s}$ $\underline{V} = \sigma^2 (\underline{U}^T \underline{U})^{-1}$	minimise $ \underline{s} - \underline{U} \underline{h} ^2$ ----- $E(\hat{\underline{h}}) = \underline{h}$ (sans biais) parmi les $\underline{h}(\underline{s})$ linéaires $\hat{\underline{h}}$ a la variance la plus petite
$E(\underline{b}) = \underline{0}$ $E(\underline{b} \underline{b}^T) = \underline{B}$	estimation de Markov $\hat{\underline{h}} = (\underline{U}^T \underline{B}^{-1} \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{B}^{-1} \underline{s}$ $\underline{V} = (\underline{U}^T \underline{B}^{-1} \underline{U})^{-1}$	----- minimise $ \underline{s} - \underline{U} \underline{h} _{\underline{B}^{-1}}$
$\underline{b} = N(\underline{0}, \underline{B})$	maximum de vraisemblance $\equiv$ Markov ($\underline{B}$ quelconque) $\equiv$ Moindres carrés $\underline{B} = \sigma^2 \underline{1}$	mêmes propriétés, de plus $p(\underline{s}/\hat{\underline{h}})$ est maximum $\hat{\underline{h}}$ est efficace et exhaustif $\hat{\underline{h}} = N(\underline{h}, \underline{V})$

Tableau I

IV - APPROCHE BAYESIENNE -

Lorsque nous avons abordé la formulation récurrente des moindres carrés, un certain manque de rigueur a pu apparaître lors de l'initialisation de l'algorithme avec une estimation initiale $\underline{h}_0$ à laquelle était associée une matrice de covariance $\underline{P}_0$.

Nous allons supposer maintenant que $\underline{h}$ est aussi un paramètre aléatoire. Ceci va nous conduire à utiliser la méthode Bayes dont l'objet est précisément d'estimer de tels paramètres. Cette nouvelle approche va nous permettre d'introduire la notion d'information a priori que nous utiliserons largement par la suite, et de donner une signification précise au couple $(\underline{h}_0, \underline{P}_0)$.

Avant de présenter quelques rappels sur l'estimation de Bayes, voyons ce qu'implique matériellement un tel point de vue. En présence d'un objet déterminé, nous devons considérer que celui-ci est une réalisation particulière d'un aléa : par exemple, tirage au hasard de cet objet dans une fabrication en série ; les connaissances a priori représentent alors les caractéristiques moyennes connues de la série.

Si l'objet considéré est unique, ce tirage est plus difficile à imaginer, mais les paramètres à identifier doivent cependant être considérés comme un point d'un espace probabilisé donné et non comme un point déterminé, bien qu'inconnu de l'espace des paramètres.

IV-1 Estimation de Bayes

Définissons une fonction non négative $C[\underline{h}, \underline{h}(\underline{s})]$ représentant le coût d'une estimation $\underline{h}(\underline{s})$ du paramètre $\underline{h}$. L'estimation de Bayes est celle qui minimise l'espérance de ce coût que l'on appelle risque.

Soit R ce risque, il vient :

$$R \triangleq E C[\underline{h}, \underline{h}(\underline{s})]$$

L'espérance étant à prendre par rapport à $\underline{h}$ et $\underline{s}$, on a alors :

$$R = \int_{R^m} d\underline{h} \int_{R^N} C[\underline{h}, \underline{h}(\underline{s})] p(\underline{h}; \underline{s}) d\underline{s} \quad (2-39)$$

Nous pouvons écrire :

$$p(\underline{h}; \underline{s}) = p(\underline{s}) \cdot p(\underline{h}/\underline{s})$$

Le risque s'écrit alors :

$$R = \int_{R^N} p(\underline{s}) d\underline{s} \int_{R^m} C[\underline{h}, \underline{h}(\underline{s})] p(\underline{h}/\underline{s}) d\underline{h}$$

La minimisation de R peut être obtenue en minimisant la seconde intégrale, puisque $p(\underline{s})$ est non négatif, il vient :

$$\min_{\underline{h}(\underline{s})} R = \min_{\underline{h}(\underline{s})} \int_{R^m} C[\underline{h}, \underline{h}(\underline{s})] p(\underline{h}/\underline{s}) d\underline{h} \quad (2-40)$$

L'estimation $\hat{\underline{h}}$ que l'on obtiendra dépend donc étroitement du choix de la fonction coût. Considérons l'estimation d'un paramètre a (scalaire), et, supposons que la fonction coût dépende de la variable écart $\epsilon = a - \hat{a}$ et soit successivement de la forme suivante (figure 3) :

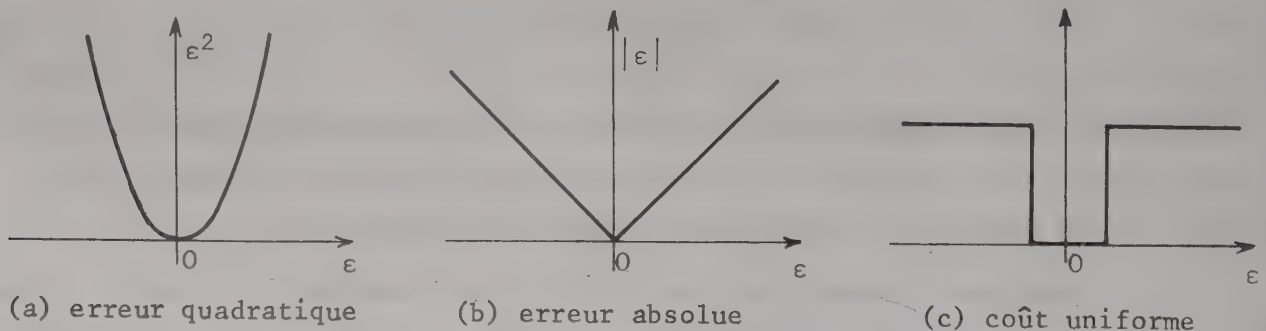


Fig. 3

Désignons par $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ et $\hat{a}_3$ l'estimation de Bayes correspondante, on montre [8] que :

coût (a) : $\hat{a}_1 = E(a/\underline{s})$ espérance conditionnelle aux mesures ou a postériori.

(la probabilité que a soit supérieur à $\hat{a}_1$ est égale à la probabilité que a soit inférieur à $\hat{a}_1$).

coût (b) : $\hat{a}_2$ est la médiane de la densité de probabilité a postériori.
(estimation du minimax, minimise l'erreur maximale $|a - \hat{a}_2|$)

coût (c) : $\hat{a}_3 = \max_a p(a/\underline{s})$ densité de probabilité a postériori maximale.

Nous représentons à la figure 4 les trois estimations obtenues dans le cas d'une densité de probabilité $p(a/\underline{s})$ quelconque.

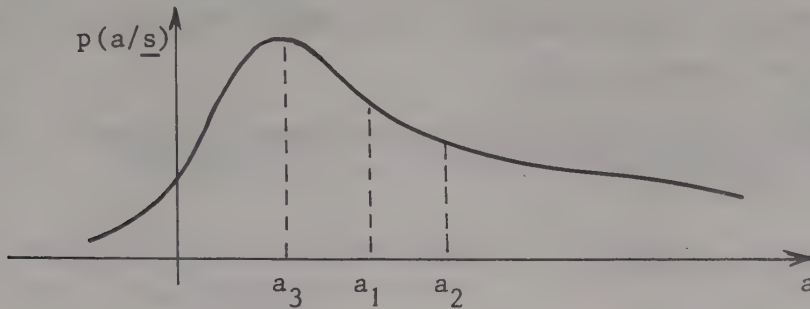


Fig. 4

Ces résultats appellent deux remarques :

- L'estimation (c) $\max_a p(a/\underline{s})$ est une estimation du maximum de vraisemblance au sens Bayésien que l'on appelle quelquefois maximum de vraisemblance inconditionnel (Eykhoff [7]) par opposition au maximum de vraisemblance classique (conditionnel).

- Les estimations $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ sont rigoureusement confondues quand $p(a/\underline{s})$ est gaussien.

Cet exemple met en évidence la diversité des estimations en fonction du coût retenu. Il paraît donc souhaitable, étant donné les éléments subjectifs qui interviennent dans l'élaboration d'un tel coût, de définir une classe de coûts et de densités a postériori conduisant à des résultats identiques, ce qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème [8]

Hypothèses : Le coût est une fonction symétrique et convexe de la variable écart $(\underline{h} - \underline{\hat{h}})$.

La densité de probabilité a postériori est symétrique par rapport à sa moyenne conditionnelle.

Conclusion : L'estimation de Bayes est la moyenne "a postériori"

$$\hat{\underline{h}}(\underline{s}) = \int_{R^m} \underline{h} p(\underline{h}/\underline{s}) d\underline{h} \quad (2-41)$$

Reprenons maintenant notre problème d'identification. Nous supposons que la perturbation $\underline{b}$ est gaussienne de densité de probabilité :

$$p(\underline{b}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{|B|}} \exp - \frac{1}{2} (\underline{b}^T B^{-1} \underline{b}) \quad (2-42)$$

L'équation de mesure est toujours :

$$\underline{s} = U \underline{h} + \underline{b}$$

Nous supposons maintenant que l'on connaît une densité de probabilité gaussienne, a priori, pour $\underline{h}$, soit :

$$p(\underline{h}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{|P_o|}} \exp - \frac{1}{2} (\underline{h} - \hat{\underline{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \hat{\underline{h}}_o) \quad (2-43)$$

Nous adoptons le coût :

$$C = ||\underline{h} - \underline{h}(\underline{s})||^2$$

En application du théorème précédent, nous savons que l'estimation de Bayes est l'espérance conditionnelle. Calculons donc $p(\underline{h}/\underline{s})$.

Il vient d'après la règle de Bayes :

$$p(\underline{h}/\underline{s}) = \frac{p(\underline{s}/\underline{h}) p(\underline{h})}{p(\underline{s})}$$

Calculons successivement $p(\underline{s}/\underline{h})$ et $p(\underline{s})$:

$$p(\underline{s}/\underline{h}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{|B|}} \exp - \frac{1}{2} (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \quad (2-44)$$

En supposant $\underline{h}$ et $\underline{b}$ indépendants, on aura :

$$p(\underline{s}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{|R|}} \exp - \frac{1}{2} (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}_o)^T R^{-1} (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}_o) \quad (2-45)$$

$$\text{avec } R = U P_o U^T + B$$

Il vient donc, d'après la règle de Bayes :

$$p(\underline{h}/\underline{s}) = \text{const.} \exp - \frac{1}{2} [(\underline{h} - \hat{\underline{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \hat{\underline{h}}_o) + (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) - (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}_o)^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}_o)] \quad (2-46)$$

Les termes entre crochets étant une forme quadratique en $\underline{h}$, $p(\underline{h}/\underline{s})$ peut s'écrire :

$$p(\underline{h}/\underline{s}) = \text{const.} \exp - \frac{1}{2} (\underline{h} - \hat{\underline{h}})^T P^{-1} (\underline{h} - \hat{\underline{h}}) \quad (2-47)$$

Où $\hat{\underline{h}}$ et P sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{h}} &= (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} (U^T B^{-1} \underline{s} + P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o) \\ P &= (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1}\end{aligned}\quad (2-48)$$

Expressions que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{h}} &= \underline{\hat{h}}_o + P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o) \\ P &= P_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U P_o\end{aligned}\quad (2-49)$$

Démonstration

Dans l'hypothèse gaussienne nous savons que $\underline{\hat{h}}$ rend également $p(\underline{h}/\underline{s})$ maximum.

Calculons le logarithme de $p(\underline{h}/\underline{s})$, il vient :

$$\begin{aligned}L(\underline{h}) &= \text{Log}[p(\underline{h}/\underline{s})] \\ L(\underline{h}) &= \text{constante} - \frac{1}{2} [(\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \\ &\quad - (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)]\end{aligned}$$

Calculons successivement les dérivées première et seconde de L par rapport à $\underline{h}$.

$$\frac{\partial L(\underline{h})}{\partial \underline{h}} = - P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + U^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \quad (2-50)$$

$$\left[\frac{\partial^2 L(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right] = - (P_o^{-1} + U^T B^{-1} U) \quad (2-51)$$

La matrice des dérivées secondes est définie négative (pour rang $U = m$), en annulant (2-50), il vient :

$$\underline{\hat{h}} = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} (U^T B^{-1} \underline{s} + P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o) \quad (2-52)$$

De (2-47), on déduit :

$$\left[\frac{\partial^2 L(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right] = - P^{-1}$$

Compte tenu de (2-51), il en découle :

$$P = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} \quad (2-53)$$

Nous venons de démontrer les relations (2-48). Appliquons maintenant la relation matricielle (2-19), p 39, à l'équation (2-53), il vient :

$$P = P_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U P_o \quad (2-54)$$

Développons (2-52), il vient, d'après (2-53) :

$$\underline{\hat{h}} = P U^T B^{-1} \underline{s} + P P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o$$

En utilisant la relation (2-20), p.39, et (2-54), on a :

$$\underline{\hat{h}} = P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} \underline{s} + \underline{\hat{h}}_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U \underline{\hat{h}}_o$$

$$\underline{\hat{h}} = \underline{\hat{h}}_o + P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)$$

c. q. f. d.

Cette démonstration met en évidence le fait que l'estimation $\underline{\hat{h}}$ minimise également la quantité Q'' définie par :

$$Q'' = (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \quad (2-55)$$

Avant de rappeler une autre propriété importante de $\underline{\hat{h}}$, définissons la matrice d'information I_T :

$$I_T \triangleq I_D + I_P \quad (2-56)$$

où I_D est la matrice d'information relative aux données :

$$I_D \triangleq - E \left[\frac{\partial^2 \text{Log } p(\underline{s}/\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right]$$

et I_P est la matrice relative aux informations a priori :

$$I_P \triangleq - E \left[\frac{\partial^2 \text{Log } p(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right]$$

Dans le présent problème, il vient, d'après (2-43) et (2-44) :

$$I_P = P_o^{-1}$$

$$I_D = U^T B^{-1} U$$

Soit :

$$I_T = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})$$

D'où, d'après (2-53) :

$$I_T = P^{-1} \quad (2-57)$$

On dit alors que l'estimation $\underline{\hat{h}}$ est "efficace", [8].

$$\begin{aligned}\underline{\hat{h}} &= (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} (U^T B^{-1} \underline{s} + P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o) \\ P &= (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1}\end{aligned}\quad (2-48)$$

Expressions que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{h}} &= \underline{\hat{h}}_o + P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o) \\ P &= P_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U P_o\end{aligned}\quad (2-49)$$

Démonstration

Dans l'hypothèse gaussienne nous savons que $\underline{\hat{h}}$ rend également $p(\underline{h}/\underline{s})$ maximum.

Calculons le logarithme de $p(\underline{h}/\underline{s})$, il vient :

$$\begin{aligned}L(\underline{h}) &= \text{Log}[p(\underline{h}/\underline{s})] \\ L(\underline{h}) &= \text{constante} - \frac{1}{2} [(\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \\ &\quad - (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)]\end{aligned}$$

Calculons successivement les dérivées première et seconde de L par rapport à $\underline{h}$.

$$\frac{\partial L(\underline{h})}{\partial \underline{h}} = - P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + U^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \quad (2-50)$$

$$\left[\frac{\partial^2 L(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right] = - (P_o^{-1} + U^T B^{-1} U) \quad (2-51)$$

La matrice des dérivées secondes est définie négative (pour rang $U = m$), en annulant (2-50), il vient :

$$\underline{\hat{h}} = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} (U^T B^{-1} \underline{s} + P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o) \quad (2-52)$$

De (2-47), on déduit :

$$\left[\frac{\partial^2 L(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right] = - P^{-1}$$

Compte tenu de (2-51), il en découle :

$$P = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})^{-1} \quad (2-53)$$

Nous venons de démontrer les relations (2-48). Appliquons maintenant la relation matricielle (2-19), p 39, à l'équation (2-53), il vient :

$$P = P_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U P_o \quad (2-54)$$

Développons (2-52), il vient, d'après (2-53) :

$$\underline{\hat{h}} = P U^T B^{-1} \underline{s} + P P_o^{-1} \underline{\hat{h}}_o$$

En utilisant la relation (2-20), p.39, et (2-54), on a :

$$\underline{\hat{h}} = P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} \underline{s} + \underline{\hat{h}}_o - P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} U \underline{\hat{h}}_o$$

$$\underline{\hat{h}} = \underline{\hat{h}}_o + P_o U^T (U P_o U^T + B)^{-1} (\underline{s} - U \underline{\hat{h}}_o)$$

c. q. f. d.

Cette démonstration met en évidence le fait que l'estimation $\underline{\hat{h}}$ minimise également la quantité Q'' définie par :

$$Q'' = (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o)^T P_o^{-1} (\underline{h} - \underline{\hat{h}}_o) + (\underline{s} - U \underline{h})^T B^{-1} (\underline{s} - U \underline{h}) \quad (2-55)$$

Avant de rappeler une autre propriété importante de $\underline{\hat{h}}$, définissons la matrice d'information I_T :

$$I_T \triangleq I_D + I_P \quad (2-56)$$

où I_D est la matrice d'information relative aux données :

$$I_D \triangleq - E \left[\frac{\partial^2 \text{Log } p(\underline{s}/\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right]$$

et I_P est la matrice relative aux informations a priori :

$$I_P \triangleq - E \left[\frac{\partial^2 \text{Log } p(\underline{h})}{\partial h_i \partial h_j} \right]$$

Dans le présent problème, il vient, d'après (2-43) et (2-44) :

$$I_P = P_o^{-1}$$

$$I_D = U^T B^{-1} U$$

Soit :

$$I_T = (U^T B^{-1} U + P_o^{-1})$$

D'où, d'après (2-53) :

$$I_T = P^{-1} \quad (2-57)$$

On dit alors que l'estimation $\underline{\hat{h}}$ est "efficace", [8].

IV-2 Parallèle avec l'estimation du maximum de vraisemblance

Dans l'optique Bayésienne, les connaissances a priori concernant les paramètres à estimer sont définies par la densité a priori, ici $p(\underline{h})$. De plus, dans l'hypothèse gaussienne, celles-ci sont entièrement résumées par le couple $(\hat{\underline{h}}_0, \underline{P}_0)$.

L'absence de connaissance a priori, qui peut aussi être envisagée lors d'une estimation de Bayes, se traduit alors tout naturellement par une matrice d'information a priori $\underline{I}_p = 0$, c'est-à-dire $\underline{P}_0^{-1} = 0$. La valeur moyenne a priori $\hat{\underline{h}}_0$ n'intervenant pas, nous retrouvons exactement l'initialisation :

$$\underline{P}_0 = \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \mathbf{1} \iff \underline{P}_0^{-1} = 0$$

$$\hat{\underline{h}}_0 \text{ quelconque fini}$$

introduite à l'occasion de l'estimation des moindres carrés.

Le formalisme de l'estimation de Bayes est alors identique à celui du maximum de vraisemblance. Les équations (2-35) et (2-36) sont confondues avec les équations (2-48) ; de plus, le critère Q'' est égal à Q' . Notons cependant qu'il n'y a alors aucun intérêt à supposer $\underline{h}$ aléatoire. Ce cas de dégénérescence est en quelque sorte une transition entre la méthode de Bayes et celle du maximum de vraisemblance, en ce sens que la première est une technique d'estimation plus élaborée que la seconde et nécessite par là davantage d'informations (définition d'un coût, loi a priori de $\underline{h}$).

Résumons à nouveau les résultats auxquels nous avons abouti dans le tableau II suivant :

hypothèses et informations	méthode	Propriétés
$p(\underline{b})$ $p(\underline{h})$ $C(\underline{h}, \hat{\underline{h}})$	Estimation de Bayes $\min_{\underline{h}} \int_{\mathbb{R}^m} C[\underline{h}, \hat{\underline{h}}] p(\underline{h}/\underline{s}) d \underline{h}$	minimise $E[C(\underline{h}, \hat{\underline{h}})]$
$\underline{b} = N(\underline{0}, B)$ $\underline{h} = N(\hat{\underline{h}}_0, \underline{P}_0)$ $C(\underline{h} - \hat{\underline{h}})$ convexe symétrique	Estimation de Bayes maximise $p(\underline{h}/\underline{s})$ $\underline{h}$ $\hat{\underline{h}} = E(\underline{h}/\underline{s})$ estimateur efficace	minimise $E[C(\underline{h}, \hat{\underline{h}})]$ et minimise $ \underline{h} - \hat{\underline{h}}_0 _{\underline{P}_0^{-1}}^2 + \underline{s} - U \underline{h} _B^2$
idem mais $\underline{P}_0 = \infty \mathbf{1}$ $\hat{\underline{h}}_0$ quelconque fini	Estimation de Bayes $\equiv$ maximum de vraisemblance $\equiv$ estimation de Markov	celles du maximum de vraisemblance voir tableau I

Tableau II

Reprenons maintenant les équations (2-32) p.43 que l'on écrit :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}}_{k+1} &= \hat{\underline{h}}_k + P_k \underline{u}_{k+1} (\sigma^2 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} (\underline{s}_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k) \\ P_{k+1} &= P_k - P_k \underline{u}_{k+1} (\sigma^2 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \underline{u}_{k+1}^T P_k\end{aligned}$$

Le procédé étant initialisé par $P_0, \hat{\underline{h}}_0$, il vient en notant $\hat{\underline{h}}_N = \hat{\underline{h}}$ et $P_N = P$ (démonstration en annexe II) :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}} &= \hat{\underline{h}}_0 + P_0 U^T (U P_0 U^T + \sigma^2 \mathbf{1})^{-1} (\underline{s} - U \hat{\underline{h}}_0) \\ P &= P_0 - P_0 U^T (U P_0 U^T + \sigma^2 \mathbf{1})^{-1} U P_0\end{aligned}\tag{2-58}$$

Les équations (2-58) sont alors identiques à (2-49) lorsque le bruit $\underline{b}$ est gaussien indépendant. Le formalisme récurrent exposé lors de la résolution numérique des moindres carrés conduit à une estimation de Bayes "en ligne" ; les informations a priori résumées par $\underline{h}_0$ et P_0 sont alors introduites de la façon la plus naturelle qui soit, c'est-à-dire comme initialisation.

Cette formulation récurrente (2-32) présente donc de grands avantages à la fois du point de vue numérique (stabilité, pas d'inversion de matrice), du point de vue théorique (estimation de Bayes en ligne), et du point de vue pratique (informations a priori résumées dans l'initialisation). Il faut cependant regretter que ce résultat soit conditionné par l'hypothèse perturbation indépendante. Telle que l'estimation a été abordée, il n'est pas possible de généraliser la solution itérative au cas où $\underline{b}_t$ est corrélé (la présence de la matrice B, éq. (2-35) p.42 rend irréalisable une décomposition analogue à celle de l'équation (2-18) p.37). Avant d'aborder ce nouveau problème (chapitre 3), nous terminons celui-ci, en revenant sur l'aspect numérique de l'identification, à partir de l'estimation des moindres carrés de la séquence de pondération.

V - LIMITATION DANS LA PRECISION DE L'IDENTIFICATION -

V-1 Influence du signal $\underline{u}_t$

Nous avons vu (§ III-2) le rôle que jouait le conditionnement de la matrice U ; un nombre de conditions élevé représente une difficulté numérique potentielle, qui existe donc quel que soit l'algorithme employé par la suite pour calculer $\hat{\underline{h}}$. C'est pourquoi il nous paraît important de voir quelle relation existe entre la nature du signal $\underline{u}_t$ et $\xi(U)$.

Etant donné la forme particulière de la matrice U (définie p.32) les colonnes de cette dernière représentent l'évolution du signal $\underline{u}_t$ à partir duquel sera identifiée la séquence de pondération du système. Le nombre de condition sera, en particulier, élevé si les vecteurs colonnes de U sont quasi-linéairement dépendants, ce qui arrive lorsque le signal $\underline{u}_t$ évolue lentement. Physiquement,

ceci signifie que ce dernier possède un spectre étroit basse fréquence. On conçoit alors intuitivement qu'on tirera d'une telle excitation du processus peu d'informations sur son comportement (dynamique) et que, par conséquent, il soit difficile d'obtenir une estimation significative de ses paramètres (coefficients de pondération).

Il y a donc une liaison étroite entre l'élément abstrait $\xi(U)$ caractérisant la difficulté qu'on aura de calculer numériquement $\hat{h}$ et le spectre du signal u_t . Pour préciser cette corrélation, nous allons simuler un signal u_t par un bruit pseudo-blanc e_t filtré (figure 5), le paramètre a du filtre permettant de faire varier le spectre du signal simulé. En raison de la stabilité supposée du filtre, on aura $0 < |a| < 1$.

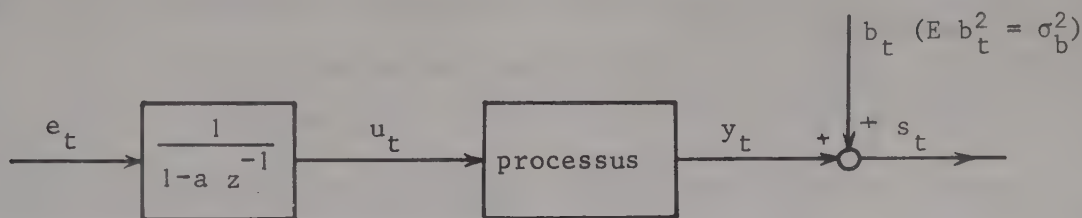


Fig. 5

L'équation du signal s'écrit alors :

$$u_t = a u_{t-1} + e_t$$

En supposant que :

$$E(e_t) = 0$$

$$E(e_i e_j) = \sigma_e^2 \delta_{ij}$$

Il vient immédiatement :

$$E(u_t) = 0$$

$$E(u_t^2) = \frac{\sigma_e^2}{1 - a^2}$$

$$E(u_t u_{t-p}) = \frac{\sigma_e^2}{1 - a^2} a^p \quad (2-59)$$

L'espérance mathématique pouvant être approchée par des moyennes finies,

il vient :

$$(U^T U)_{ij} \neq N E(u_{t-i} u_{t-j})$$

Le facteur N n'exerçant aucune influence sur la précision des calculs,

nous considérons la matrice $\frac{1}{N} U^T U$ qui est alors de la forme :

$$C = \frac{1}{1 - a^2} \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a^m \\ a & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m & \dots & a & 1 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

On vérifiera facilement que :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & & 0 \\ -a & 1+a^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -a & 1 \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

et que son déterminant vaut :

$$|C| = \frac{1}{1 - a^2} \quad (2-62)$$

Rappelons que la matrice de covariance de l'estimation $\hat{h}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= \sigma_b^2 (U^T U)^{-1} \\ &= \frac{\sigma_b^2}{N} C^{-1} \end{aligned} \quad (2-63)$$

Notons que :

$$\sigma_y^2 = K \sigma_u^2$$

en tenant compte de (2-59), (2-63) peut se mettre sous la forme :

$$V = K' \frac{\sigma_b^2}{\sigma_y^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & & 0 \\ \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} \\ & & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

Considérons une succession d'expériences où l'on fait varier le paramètre a entre 0 et 1 en ajustant σ_e de façon que l'identification soit effectuée avec un rapport bruit sur signal (σ_b/σ_y) constant. D'après la relation (2-64), on voit immédiatement que la variance des estimations (ou leur somme $\text{Tr } V$) est minimale lorsque le paramètre a est nul. En ce qui concerne le conditionnement de la matrice C , on se trouve également dans des conditions idéales, puisque :

$$C = C^{-1} = 1$$

$$\xi(C) = 1$$

On retrouve là un résultat développé différemment par Levin [9].

Par contre, lorsque a tend vers 1^+ , d'une part le conditionnement de la matrice C est de plus en plus mauvais :

$$\lim_{a \rightarrow 1} \xi(C) = \infty$$

mais, d'autre part :

$$\lim_{a \rightarrow 1} \text{tr } V = \infty$$

le signal u_t a (à variance constante) des variations de moins en moins rapides.

A cet égard, le nombre de condition $\xi(C)$ ($=|\xi(U)|^2$) réalise donc un parallèle entre le point de vue déterministe de l'analyse numérique et la notion de variance introduite dans le contexte statistique de l'estimation ; le signal u_t qui assurera le meilleur conditionnement de U est celui qui permettra d'estimer $\underline{h}$ avec une variance la plus petite.

Cette simulation met en évidence le fait que plus le spectre du signal u_t sera étalé (ou plus sa fonction d'autocorrélation sera étroite) moins l'estimation sera sensible aux bruits, c'est-à-dire meilleurs seront les conditions d'identification.

Rappelons que dans la pratique le système discret que l'on traitera sera souvent issu de l'échantillonnage d'un processus (continu). Par conséquent, le conditionnement de U ne dépendra pas seulement de la nature de u_t , mais encore du pas d'échantillonnage T utilisé. En effet, on conçoit aisément que même si l'entrée (continue) $u(t)$ varie rapidement, la séquence u_t déduite par échantillonnage peut varier aussi lentement qu'on le désire pour peu que T soit suffisamment petit. Il s'agit encore une fois d'adapter l'amplitude de T à la rapidité de variation de $u(t)$.

V-2 Estimation de la réponse impulsionnelle

A la fin du chapitre précédent (§ III), nous avons établi une relation permettant de déduire de la séquence de pondération une réponse impulsionnelle approchée. Nous avons dès lors souligné l'existence des difficultés numériques qui pourraient survenir par suite de l'emploi d'un pas d'échantillonnage trop fin.

† Il est bien entendu que a peut tendre vers 1 mais ne peut prendre la valeur 1, le signal u_t serait alors non stationnaire (processus de Wiener) et la relation (2-59) n'aurait plus aucune signification.

Il convient donc de réaliser un compromis entre la finesse de la représentation du processus (continu) et le conditionnement de la matrice U qui en résulterait en fonction de la nature du signal $u(t)$ dont on pourra disposer.

Voyons, maintenant, ce que le point de vue statistique peut nous apporter. On démontre [10], [11] que la variance de l'estimation (au sens des moindres carrés) de $\frac{h_i}{T}$, approchant la réponse impulsionnelle point par point, tend vers l'infini quand T tend vers zéro. Ceci ne signifie pas pour autant que l'estimation de l'ensemble des paramètres n'ait plus aucune signification. En effet, leur nombre tend également vers l'infini quand T tend vers zéro, par suite, si ces "points" ($\frac{h_i}{T}$) sont utilisés pour tracer une courbe moyenne représentant la réponse impulsionnelle, il est raisonnable de penser que cet ajustement aura une certaine précision. En fait, on démontre [10], sous certaines hypothèses, que l'erreur quadratique moyenne entre la sortie du processus et la sortie prédite par le modèle tend vers une limite finie indépendante de T , quand T tend vers zéro. A cet égard, cette quantité peut représenter une mesure de la précision de l'identification.

De ce point de vue, il apparaît que si l'on est capable (théoriquement) d'obtenir une estimation optimale (éventuellement très précise) de la séquence de pondération, on n'est pas assuré pour autant d'avoir identifié le mieux possible le processus, en particulier, lorsqu'il s'agit d'un modèle continu où s'ajoute la perte d'information due à l'échantillonnage des entrées-sorties.

En effet, si le signal u_t , à partir duquel ont été estimés les paramètres du modèle, a été élaboré de façon à satisfaire certains critères, celui-ci n'a aucune raison d'être représentatif du fonctionnement normal du processus. Par conséquent, ce que l'on peut gagner en précision sur l'estimation des paramètres peut ne rien ajouter aux qualités prédictives de ce modèle.

Devant l'incompatibilité de ces différents critères, dont le rationalisme n'est que formel, on serait tenté de leur substituer celui du jugement de l'expérimentateur. En tout état de cause, le but final de l'identification doit être un élément permettant de juger de sa précision.

Ces remarques n'ont pas pour but de minimiser l'importance des différents résultats théoriques auxquels nous avons abouti, mais de leur donner leur juste valeur (dans le contexte de l'automatique).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LINNIK Y.V. - "Méthode des moindres carrés"
Dunod 1963.
- [2] HANSON R.J. et - "Linear least squares problems"
LAWSON C.L. Mathematics of computation
Vol 23, N°108 oct. 1969, p.783-813
- [3] RAVIART P.A. - "Analyse numérique"
Cours de C3 Université de Rennes, année 1967-1968
- [4] KOWALIK J. and - "Methods for unconstrained optimization problems"
OSBORNE M.R. American Elsevier Publishing Company, Inc. 1968
- [5] ASTROM K.J. and - "System Identification, a survey"
EYKHOFF P. I.F.A.C. Prague 1970
- [6] VAN DER WAERDEN B.L. - "Statistique mathématique"
Dunod 1967
- [7] EYKHOFF P. - "Process parameter and state estimation"
I.F.A.C. Prague 1967
- [8] VAN TREES H.L. - "Detection Estimation and Modulation theory"
J. Wiley 1968 (part I)
- [9] LEVIN M.J. - "Optimum Estimation of Impulse Response in the
presence of Noise"
I.R.E. Trans. on circuit theory, March 1960
- [10] PEREL'MAN I.I. - "Estimation Accuracy of Impulse Response of a Linear
dynamic Plant"
I.F.A.C. Prague 1967
- [11] FANTAUZZI G. - "The relation between the sampling time and stochas-
tic error for the impulse response of linear time
independent systems"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control AC-13 August 1968.

Chapitre 3

IDENTIFICATION ET FILTRAGE LINEAIRE

Une formulation encore peu usitée nous a permis de présenter l'identification comme un problème de filtrage linéaire. Les résultats de la théorie de Kalman conduisent alors à la mise en oeuvre d'un algorithme récurrent optimal généralisant la méthode des moindres carrés.

Des résultats originaux ont été obtenus concernant :

- d'une part, la prise en compte de connaissances a priori, introduites par l'intermédiaire de l'initialisation de l'algorithme d'identification, grâce auxquelles l'influence de l'instabilité de la déconvolution peut être rendue négligeable.

- d'autre part, une technique d'échantillonnage à pas variables des réponses impulsionnelles permettant de réduire considérablement la dimension du problème à résoudre en présence de systèmes multivariables.

Nous traitons enfin d'une méthode qui nous est propre, relative à la détermination des paramètres d'un modèle des perturbations, réalisant un compromis entre simplicité et efficacité.

L'algorithme général résultant a fait l'objet d'un code FORTRAN dont nous présentons les grandes lignes à la fin de ce chapitre.

I - INTRODUCTION -

Nous avons démontré, dans l'hypothèse de perturbations sur la sortie, gaussiennes et indépendantes, que l'estimation des moindres carrés est optimale (convergence, exhaustivité, efficacité) lorsque les seules informations dont on dispose sont les données (u_t, s_t) .

Nous avons vu que :

- d'une part, on pouvait obtenir une estimation "en ligne", à l'aide d'un algorithme récurrent, en initialisant celui-ci par une estimation $\hat{h}_0$ quelconque finie, et d'une matrice de covariance P_0 , telle que $P_0^{-1} = 0$.

- d'autre part, ce même algorithme conduisait à une estimation de Bayes dont les informations a priori sur $\underline{h}$ (considéré alors comme une variable aléatoire gaussienne) étaient précisément résumées par l'initialisation $(\hat{\underline{h}}_0, P_0)$.

Ce résultat, dont nous avons souligné l'importance à la fois théorique et pratique, n'a été établi que si les perturbations b_t étaient indépendantes.

Considérée comme un problème de filtrage linéaire, l'estimation de la séquence de pondération est obtenue en définissant un vecteur d'état généralisé, adéquat. L'application de la théorie de Kalman conduit immédiatement à un algorithme récurrent optimal. La souplesse de cette formulation permet de nombreuses extensions par la simple définition d' "états" supplémentaires.

C'est donc sur la base du filtrage de Kalman que nous avons abordé les difficultés propres à l'identification des séquences de pondération (Instabilité de la déconvolution - dimension de l'espace des paramètres).

Les informations a priori, rappelons-le, sont résumées par le couple $(\underline{h}_0, P_0)$ dans l'hypothèse gaussienne. Nous déterminons alors une structure de la matrice P_0 , appropriée aux connaissances a priori (implicites) dont on peut disposer, les résultats (quantitatifs) relatifs par exemple à des expériences antérieures étant pris en compte par $\underline{h}_0$.

Une technique d'échantillonnage à pas variable, dans laquelle les coefficients de pondération h_t peuvent être séparés par des intervalles de temps kT (k entier positif) permet de diminuer très nettement le nombre de paramètres nécessaire à représenter un système de mémoire mT . Il est alors possible d'identifier des systèmes multivariables relativement importants, en conservant un nombre raisonnable de paramètres face aux exigences de calcul que cela implique.

La mise en oeuvre d'un filtre de Kalman nécessite par ailleurs la connaissance de l'environnement stochastique du processus. Dans l'hypothèse où les perturbations sont susceptibles d'être représentées par un modèle de Markov, nous en déterminons une structure aussi simple que possible permettant d'obtenir des informations indispensables telles que : variance et corrélation du bruit.

Avant d'aborder ces différents points, nous rappelons maintenant quelques résultats concernant le filtrage de Kalman.

II - LE FILTRAGE DE KALMAN -

Nous rappelons ici les résultats de la théorie du filtrage de Kalman discret [1]. Ce filtre concerne les systèmes linéaires représentés par leurs équations d'état :

$$\begin{aligned}\underline{x}_k &= \Phi_{k,k-1} \underline{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \underline{w}_{k-1} \\ \underline{z}_k &= H_k \underline{x}_k + \underline{v}_k\end{aligned}\quad (3-1)$$

où $\underline{x}_k$ désigne le vecteur d'état, $\underline{u}_k$ le vecteur de commande et $\underline{z}_k$ le vecteur sortie mesurée ; $\Phi_{k,k-1}$, Γ_k et H_k représentent la matrice de transition, la matrice de commande et la matrice de sortie.

Le but du filtre de Kalman est d'obtenir une estimation du vecteur d'état $\underline{x}_p$ à l'instant t_p , compte tenu des informations disponibles à un instant t_q , que l'on note $\hat{\underline{x}}_{p/q}$. Selon que t_p est inférieur, égal ou supérieur à t_q , on parlera de lissage, estimation ou prédiction.

A $\hat{\underline{x}}_{p/q}$ est associée une matrice de covariance notée $P_{p/q}$, définie par :

$$E(\underline{x}_p - \hat{\underline{x}}_{p/q})(\underline{x}_p - \hat{\underline{x}}_{p/q})^T = P_{p/q}$$

Ces deux grandeurs sont calculées pas à pas (récurrence par rapport à k) en fonction :

- des mesures $\underline{u}_k$, $\underline{s}_k$
- des matrices (connues) $\Phi_{k,k-1}$, Γ_k , H_k
- de l'estimation initiale, notée $\hat{\underline{x}}_{0/0}$, et de sa matrice de covariance

$P_{0/0}$

- des propriétés statistiques (supposées connues) des perturbations

$\underline{w}_k$, $\underline{v}_k$, caractérisées par :

$$E(\underline{w}_k) = \underline{0}$$

$$E(\underline{v}_k) = \underline{0}$$

valeurs moyennes nulles.

$$E(\underline{w}_i \underline{w}_j^T) = \delta_{ij} Q_i$$

$$E(\underline{v}_i \underline{v}_j^T) = \delta_{ij} R_i$$

séquences indépendantes.

$$E(\underline{v}_i \underline{w}_j^T) = 0$$

indépendance des bruits sur la mesure et sur l'état.

$$E[\underline{v}_i (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})^T] = 0$$

indépendance du bruit de mesure et de l'estimation initiale.

Les équations de filtrage peuvent se scinder en deux groupes :

- l'un concernant la prédiction de l'état $\underline{x}_k$ à partir de l'estimation précédente $\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}$

- l'autre relatif à l'estimation connaissant cette prédiction et la mesure à l'instant k .

Rappelons les résultats classiques suivants :

Prédiction -

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1} + \Gamma_{k-1} \underline{u}_{k-1} \\ P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases} \quad (3-2)$$

Estimation -

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k (\underline{z}_k - H_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \\ P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k H_k P_{k/k-1} = (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} \\ K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} = P_{k/k} H_k^T R_k^{-1} \end{cases} \quad (3-3)$$

Ces relations peuvent être démontrées et les estimations obtenues interprétées de maintes façons [2].

Notons en particulier que :

- d'une part, si l'on s'en tient aux caractéristiques des bruits, moyennes et covariances, sans faire d'hypothèse sur leur loi de probabilité, l'estimateur de Kalman est celui qui, parmi les estimateurs fonctions linéaires des mesures et de l'estimation initiale, a la variance la plus petite (extension de la méthode des moindres carrés).

- d'autre part, en considérant $\underline{x}$ comme une variable aléatoire gaussienne et en supposant que $\underline{v}_k$ et $\underline{w}_k$ suivent également des lois gaussiennes, l'estimation de Kalman est une estimation de Bayes pour toute fonction coût de $(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})$ symétrique et convexe. L'estimation $\hat{\underline{x}}_{k/k}$ est alors l'espérance de $\underline{x}_k$ conditionnellement aux mesures (a posteriori) et maximise la densité de probabilité a posteriori.

Nous retrouvons là un contexte familier que nous avons développé au cours des différents rappels sur la théorie de l'estimation (ch. 2).

III - APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN A L'ESTIMATION DE LA SEQUENCE DE PONDERATION -

Notre propos est de définir un vecteur $\underline{x}_k$ ne représentant pas nécessairement un état proprement dit, mais permettant d'écrire l'équation du modèle séquence de pondération :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h} + b_t \quad (3-4)$$

sous la forme (3-1).

Il est d'usage [3], lorsqu'on applique des techniques de filtrage à l'identification, de définir un vecteur d' "état généralisé" contenant à la fois l'état réel du système et les paramètres à estimer. Le procédé envisagé ici est en quelque sorte une extrapolation du cas précédent. Ainsi nous utiliserons un vecteur d'état généralisé ne contenant que les paramètres à estimer, en l'occurrence les coefficients de pondération du système [4].

On pose donc :

$$\underline{x}_k = \underline{h} \quad (3-5)$$

Nous voyons immédiatement que l'on peut envisager l'identification de systèmes non stationnaires en écrivant :

$$\underline{x}_k = \phi_{k,k-1} \underline{x}_{k-1} + \underline{w}_{k-1} \quad (3-6)$$

La non-stationnarité de $\underline{h}$ est alors prise en compte par $\phi_{k,k-1}$ et Q_k .

Les difficultés pratiques rencontrées pour déterminer un couple $(\phi_{k,k-1} ; Q_k)$ représentatif du fonctionnement du système sont une des raisons majeures pour laquelle cette hypothèse n'est que rarement envisagée. C'est pourquoi nous nous limiterons au cas stationnaire (ou supposé tel).

L'équation (3-6) s'écrit alors :

$$\underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} = \underline{h}$$

Ce qui entraîne :

$$\phi_{k,k-1} = \mathbf{1} ; \Gamma_k = 0 ; Q_k = 0 \quad (3-7)$$

III-1 Identification en présence de perturbations indépendantes sur la sortie

L'équation du modèle séquence de pondération s'écrit, rappelons-le :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h} + b_t$$

où dans le cas présent b_t est une séquence pseudo-blanche centrée, de variance σ_b^2 .

En identifiant cette relation à l'équation "de mesure" :

$$\underline{z}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{v}_k$$

On est amené à poser :

$$H_k = \underline{u}_k^T = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m+1}]$$

$$\underline{z}_k = s_k$$

$$R_k = E(b_k)^2 = \sigma_b^2$$

(3-8)

Appliquons les équations (3-2) et (3-3) à ce cas particulier.

Il vient, compte tenu des relations (3-7) et (3-8), d'une part :

$$\begin{cases} \hat{h}_{k/k-1} = \hat{h}_{k-1/k-1} \\ P_{k/k-1} = P_{k-1/k-1} \end{cases}$$

et, d'autre part :

$$\begin{cases} \hat{h}_{k+1/k+1} = \hat{h}_{k/k} + P_{k/k} u_{k+1} (u_{k+1}^T P_{k/k} u_{k+1} + \sigma_b^2)^{-1} (s_k - u_{k+1}^T \hat{h}_{k/k}) \\ P_{k+1/k+1} = P_{k/k} - P_{k/k} u_{k+1} (u_{k+1}^T P_{k/k} u_{k+1} + \sigma_b^2)^{-1} u_{k+1}^T P_{k/k} \end{cases} \quad (3-9)$$

Notons que la notion de prédiction disparaît, ce qui est naturel puisqu'il s'agit ici de l'estimation de paramètres constants.

Enfin, nous reconnaissons dans les équations (3-9) les expressions de l'estimation des moindres carrés récurrents (équation 2-32, p.43).

Les propriétés optimales du filtrage de Kalman et les diverses interprétations statistiques qui lui sont associées permettent de retrouver immédiatement les différents points de vue exposés dans le chapitre 2, relatifs à l'estimation du vecteur $\underline{h}$.

III-2 Extension de l'algorithme en présence de perturbations colorées

Nous avons dit qu'il n'y avait pas d'extension immédiate à la formulation récurrente des moindres carrés lorsqu'on voulait obtenir une estimation optimale (Bayes - max. vrais.) en présence de perturbations colorées.

L'identification, considérée comme un filtrage, va nous permettre, en appliquant les résultats de Kalman, d'obtenir une formulation récurrente analogue à celle des moindres carrés lorsque les perturbations sont susceptibles d'être représentées par un modèle de Markov.

Nous adoptons, ici, le modèle autorégressif suivant :

$$b_t = c_1 b_{t-1} + c_2 b_{t-2} + \dots + c_p b_{t-p} + \epsilon_t \quad (3-10)$$

dont nous supposons provisoirement connus les coefficients c_i et la variance σ_b^2 du bruit pseudo blanc ϵ_t .

Physiquement, cela signifie que b_t peut être considéré comme la sortie du filtre d'ordre p , figure 1, dont l'entrée serait la séquence indépendante ϵ_t .

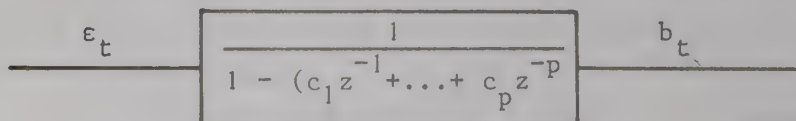


Fig. 1

Définissons un vecteur $\underline{b}_t$ par :

$$\underline{b}_t = \begin{bmatrix} b_{t-p} \\ \vdots \\ b_{t-1} \\ b_t \end{bmatrix}$$

L'équation (3-10) peut s'écrire maintenant :

$$\underline{b}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & c_p & \dots & c_1 & \end{bmatrix} \underline{b}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

Considérons le vecteur d'état généralisé suivant :

$$\underline{x}_t^T \triangleq [h_1, h_2, \dots, h_m, \underbrace{b_{t-p}, b_{t-p+1}, \dots, b_{t-1}, b_t}_{p \text{ termes}}] \quad (3-12)$$

et définissons un vecteur $\underline{a}_t$ par :

$$\underline{a}_t^T = [u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-m+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0, 1}_{p \text{ termes}}] \quad (3-13)$$

Le système à identifier est maintenant caractérisé par :

$$\begin{aligned} s_t &= \underline{u}_t^T \underline{h} + b_t \\ b_t &= c_1 b_{t-1} + \dots + c_p b_{t-p} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

dont la première équation s'écrit aussi :

$$s_t = \underline{a}_t^T \underline{x}_t \quad (3-14)$$

D'après la définition de $\underline{x}_t$ et compte tenu de (3-11), il vient :

$$\underline{x}_t = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & c_p \dots \end{bmatrix} \underline{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Les équations (3-14) et (3-15) ont de la forme (3-1) en posant :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & c_p \dots c_1 \end{bmatrix} ; \Gamma = 0 ; H_k = \underline{a}_k^T \quad (3-16)$$

D'après (3-14) on a :

$$R = 0 \quad (3-17)$$

De (3-15), il vient :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

Les équations du filtrage s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k/k-1} = \Phi \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1} \\ P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1/k-1} \Phi^T + Q \end{cases} \quad (3-19)$$

pour ce qui est de la prédiction,

et :

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k (s_k - \underline{a}_k^T \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \\ P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k \underline{a}_k^T P_{k/k-1} \\ K_k = P_{k/k-1} \underline{a}_k (\underline{a}_k^T P_{k/k-1} \underline{a}_k)^{-1} \end{cases} \quad (3-20)$$

en ce qui concerne la phase d'estimation.

Nous venons d'obtenir une estimation récurrente du vecteur $\underline{x}$ sans inversion de matrice ($\underline{a}_k^T P_{k/k-1} \underline{a}_k$ étant un scalaire) dont les m premières composantes définissent la séquence de pondération $\underline{h}$.

Les équations (3-19) et (3-20) représentent donc la généralisation souhaitée de l'expression des moindres carrés récurrents. Elles supposent connus les paramètres c_i et σ_b . Leur estimation sera traitée au § VI.

III-3 Estimation d'une composante continue

Il arrive fréquemment que la physique du processus conduise à écrire l'équation du modèle séquence de pondération sous la forme :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h} + b_t + d \quad (3-21)$$

où d représente une constante inconnue. Celle-ci peut être considérée, soit comme une composante continue sur la sortie ou / et sur l'entrée, cette dernière pouvant être ramenée sur la sortie, à un coefficient près (gain statique du système).

L'estimation du terme d est immédiate en adjoignant une composante supplémentaire au vecteur d'état généralisé $\underline{x}$; soit :

$$\begin{aligned} \underline{x}'^T &= [\underline{h}^T, b_{t-p}, b_{t-p+1}, \dots, b_{t-1}, b_t, d] \\ \underline{x}'^T &= [\underline{x}^T, d] \end{aligned} \quad (3-22)$$

L'équation du système (3-21) s'écrit encore :

$$s_t = \underline{a}_t'^T \underline{x}'$$

en posant :

$$\begin{aligned} \underline{a}_t'^T &= [\underline{u}_t^T, 0, \dots, 0, 1, 1] \\ &= [\underline{a}_t^T, 1] \end{aligned} \quad (3-23)$$

Puisque d est constant, la nouvelle matrice Φ' est donnée par :

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \Phi & | & 0 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

L'estimation de l' "état" augmenté est donnée par les équations (3-19) et (3-20) avec les notations Φ' , $\underline{x}'_t$, $\underline{a}'_t$.

III-4 Extension aux systèmes comportant une intégration

De tels systèmes sont essentiellement caractérisés par une séquence de pondération dont le terme général h_t ne tend pas vers zéro mais vers une constante lorsque t tend vers l'infini. Il n'est bien sûr plus possible de parler de modèle à mémoire finie, mais par analogie aux systèmes asymptotiquement stables, on définit un indice m tel que :

$$h_t - h_\infty \sim 0 \quad \forall t > m, \quad (3-25)$$

par conséquent, on peut se ramener à l'estimation d'un nombre fini de paramètres, en supposant h_t constant pour t supérieur à m. Néanmoins, l'équation du système est quelque peu modifiée et s'écrit maintenant :

$$s_t = \begin{cases} \underline{u}_t^T \underline{h} + h_m \sum_{j=1}^{t-m} u_j + b_t & ; \quad t > m \\ \underline{u}_t^T \underline{h} + b_t & ; \quad 0 < t \leq m \end{cases} \quad (3-26)$$

que l'on peut mettre sous la forme habituelle (3-4), p64, en définissant une sortie modifiée sm_t par :

$$sm_t = \begin{cases} s_t & ; \quad 0 < t \leq m \\ s_t - h_m \sum_{j=1}^{t-m} u_j & ; \quad t > m \end{cases}$$

Par suite, l'identification est obtenue d'une façon analogue au cas précédent en utilisant sm_t au lieu de s_t dans les équations (3-20).

Cependant, si l'identification d'une composante continue sur la sortie

peut être encore prise en compte par l'adjonction d'un terme constant dans l'équation (3-26), il n'en est pas de même de la présence d'une composante continue sur l'entrée. En raison de l'intégration présente dans le système, cette constante inconnue sur l'entrée se traduit par une rampe sur la sortie et nécessite donc des modalités particulières que nous exposons maintenant. L'équation discrète de cette rampe peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= d_t + e_t \\ e_{t+1} &= e_t \end{aligned} \quad (3-27)$$

avec :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h} + h_m \sum_{j=1}^{t-m} u_j + b_t + d_t \quad (3-28)$$

que nous écrivons :

$$s_t = \underline{a}_t''^T \underline{x}_t''$$

en posant :

$$\begin{aligned} \underline{a}_t''^T &= [\underline{a}_t^T, 1, 0] \\ \underline{x}_t''^T &= [\underline{x}_t^T, d_t, e_t] \end{aligned} \quad (3-29)$$

Ce cas peut donc encore être traité par filtrage en introduisant 2 composantes supplémentaires à l' "état" $\underline{x}_t$, la matrice Φ'' étant d'après (3-27) et (3-29) :

$$\Phi'' = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi' & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'identification globale est obtenue encore une fois par les équations (3-19) et (3-20) avec les notations $\underline{a}_t''$, $\underline{x}_t''$, Φ'' et sm_t .

Jusqu'ici nous avons supposé que les conditions initiales sur u_t étaient nulles, équation (3-26). Dans le cas contraire, l'équation du système s'écrit :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h} + h_m \sum_{j=-\infty}^{t-m} u_j + b_t$$

où intervient le terme :

$$h_m \sum_{j=-\infty}^{t-m} u_j = h_m \left[\sum_{j=1}^{t-m} u_j + S \right]$$

dans lequel S représente le passé de l'entrée qui est inconnu ; en raison du produit $h_m S$, l'estimation de S ne peut être obtenue par filtrage linéaire. C'est pourquoi nous proposons une seconde voie pour identifier la séquence h_t .

Considérons maintenant la séquence dérivée g_t définie par :

$$g_t = h_t - h_{t-1}$$

qui en raison de l'approximation (3-25) représente la séquence de pondération d'un système asymptotiquement stable, à mémoire finie, il vient :

$$g_t \sim 0 \quad \forall t > m$$

La séquence g_t une fois estimée, on pourra en déduire la séquence h_t par la relation :

$$h_t = \sum_{j=1}^t g_j ; \quad t = 1, \dots, m$$

Voyons maintenant comment estimer g_t . On peut opérer de deux façons :

- soit en intégrant l'entrée, les données seront alors $(\sum_{j=1}^t u_j, s_t)$,
- soit en dérivant la sortie, les données étant $(u_t, s_t - s_{t-1})$.

La première solution présente les mêmes inconvénients que la méthode "directe" que nous avons exposée auparavant, en ce qui concerne la composante continue sur l'entrée et les conditions initiales sur u_t . De plus, la nouvelle entrée, obtenue après intégration, offre un spectre moins riche que le signal original.

La seconde solution n'est pas sans défaut puisque la dérivation du signal bruité s_t conduit à une nouvelle sortie ayant un niveau de bruit plus élevé. Cependant, la dégradation de l'estimation de g_t qui en résulte, n'affecte que peu celle de h_t déduite de g_t par une intégration.

Par ailleurs, cette méthode permet la prise en compte d'une composante continue sur l'entrée par la simple adjonction d'un terme constant sur la sortie modifiée $s_t - s_{t-1}$, puisque la "rampe" intervenant sur s_t devient une constante pour le signal dérivé. Mais, elle a essentiellement le mérite de permettre une identification en présence de conditions initiales non nulles.

En effet, nous avons :

$$s_t = h_1 u_t + \dots + h_j u_{t-j+1} + \dots + b_t$$

$$s_{t-1} = h_1 u_{t-1} + \dots + h_j u_{t-j} + \dots + b_{t-1}$$

$$s_t - s_{t-1} = h_1 u_t + (h_2 - h_1) u_{t-1} + \dots + (h_m - h_{m-1}) u_{t-m+1} + b_t - b_{t-1}$$

que nous écrivons :

$$s'_t = g_1 u_t + \dots + g_m u_{t-m+1} + b_t - b_{t-1} \quad (3-30)$$

On peut donc opérer de la même manière que pour les systèmes asymptotiquement stables, c'est-à-dire, en prenant comme instant initial de l'identifica-

tion $t = m$ (ch.2 § II, p.30).

Nous avons défini un vecteur d'état $\underline{x}_t$ par :

$$\underline{x}_t^T = [\underline{h}^T, b_{t-p}, b_{t-p+1}, \dots, b_{t-1}, b_t]$$

L'équation (3-30) peut se mettre sous la forme :

$$s'_t = \underline{a}_t^T \underline{x}_t$$

en posant :

$$\underline{a}_t^T = [\underline{u}_t^T, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-1 \text{ termes}}, -1, 1] \quad (3-31)$$

Par conséquent, l'estimation de la séquence g_t peut être obtenue par filtrage de la même manière que le vecteur $\underline{h}$ en utilisant la sortie "dérivée" $s_t - s_{t-1}$ au lieu de s_t et en introduisant un coefficient -1 dans le vecteur $\underline{a}_t$. Connaissant l'estimation $\hat{\underline{g}}$ et P_g sa matrice de covariance, on en déduit immédiatement $\hat{\underline{h}}$ et P_h par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{h}} &= A \hat{\underline{g}} \\ P_h &= A P_g A^T \end{aligned} \quad (3-32)$$

avec $A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 1 & \dots & & 1 \end{bmatrix}$

III-5 Estimation du gain statique

Pour les systèmes asymptotiquement stables, on peut estimer le gain statique γ défini par :

$$\hat{\gamma} = \sum_{t=1}^m \hat{h}_t \quad (3-33)$$

en remarquant que cette expression peut s'écrire :

$$\gamma = [1 \dots 1] \underline{h}$$

sa variance est donnée par :

$$\sigma_{\gamma}^2 = [1 \dots 1] P \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m P_{ij} \quad (3-34)$$

III-6 Généralisation aux systèmes multivariables

On considère maintenant un modèle comportant q entrées et r sorties. La représentation adoptée nous conduit à définir une matrice de séquence de pondération dont les éléments ij sont eux-mêmes des matrices colonnes $\underline{h}^{ij}$ dont les composantes h_k^{ij} sont les coefficients de pondération relatifs à l'entrée

u_{t-k+1}^i et la sortie s_t^j . Plus précisément, nous écrirons :

$$s_t^j = \sum_{i=1}^q [h_{1j}^{ij} u_t^i + h_{2j}^{ij} u_{t-1}^i + \dots + h_{m_{ij}j}^{ij} u_{t-m_{ij}+1}^i] + b_t^j$$

$$s_t^j = \sum_{i=1}^q u_t^i \underline{h}_{ij}^j + b_t^j \quad (3-35)$$

Nous pouvons décomposer le problème en considérant successivement r systèmes ayant q entrées et 1 sortie. Chaque sous-système peut alors être identifié d'une manière analogue au cas monovariable en posant :

$$\underline{h}^T = [h_1^1, \dots, h_{m_1}^1 ; h_1^2, \dots, h_{m_2}^2 ; \dots ; h_1^q, \dots, h_{m_q}^q]$$

que l'on note :

$$\underline{h}^T = [\underline{h}_1^T, \underline{h}_2^T, \dots, \underline{h}_q^T] \quad (3-36)$$

La matrice de covariance P relative à $\underline{h}$ est de même partitionnée en conséquence :

$$[P_{ij}] = E(\underline{h}_i \underline{h}_j^T) \quad (3-37)$$

Par suite, l'identification des systèmes multivariables peut être obtenue sans modifier la structure de l'algorithme d'estimation précédemment exposé, seules les modalités de mise en oeuvre sont adaptées au problème considéré.

Remarque - Pour les systèmes dont *certaines* chaines pourraient comporter une intégration, il est souhaitable d'utiliser la méthode que nous avons appelé "directe". Il est bien évident que si les conditions initiales sur l'entrée ne sont pas nulles, la dernière méthode s'impose. Notons alors qu'on estimera les séquences dérivées (g_t) pour toutes les chaines relatives à la sortie considérée.

IV - INFORMATION A PRIORI - INITIALISATION -

La mise en oeuvre pratique de l'identification d'un processus nécessite, outre les mesures (u_t, s_t), la formulation d'un certain nombre d'hypothèses. Celles-ci peuvent porter sur l'environnement du système, mais aussi sur celui-ci même : linéarité, stationnarité ...

La structure du modèle choisi peut être également comptée au rang de ces hypothèses. Nous pensons en particulier à l'estimation des paramètres de la transmittance du système (fraction rationnelle de la variable s ou z) dont on se fixe, en général, les degrés du numérateur et dénominateur.

En ce qui concerne l'identification des processus par leur séquence de pondération, de telles informations a priori ne sont pas explicitées, et,

à cet égard, ce modèle est celui qui nécessite le moins d'hypothèses sur la structure du système. Cependant, devant les difficultés bien connues, nées de l'instabilité de la déconvolution [5] conduisant à des "temps d'identification" importants [6], il nous paraît judicieux de pouvoir prendre en compte ces connaissances a priori sous-jacentes, en ce sens que les coefficients h_t ne sont pas indépendants (hypothèse correspondant à une absence totale de connaissance a priori), mais sont solution d'une équation récurrente par suite de la relation existant entre séquence de pondération et transmittance en z .

Avant d'aborder l'exposé de la méthode que nous proposons pour introduire ces informations par l'intermédiaire de l'initialisation $(\hat{h}_{0/0}, P_{0/0})$, nous allons, à l'aide d'un exemple simple, analyser le concept de "temps d'identification" et voir quel rôle peuvent jouer les informations a priori sur le résultat de l'identification.

IV-1 Temps d'identification

Le temps d'identification, c'est la durée, nécessaire, des signaux entrée-sortie, à partir desquels est effectuée l'identification, pour estimer les paramètres du modèle avec une précision donnée.

Nous allons rapprocher ce concept de celui de quantité d'information. Pour cela, replaçons-nous dans le contexte bayésien, en supposant, de plus, que les variables aléatoires en présence sont gaussiennes. Nous avons vu que la matrice d'information I_T était composée de la somme de deux matrices I_P et I_D , relatives respectivement aux connaissances a priori et aux données, et vérifiait la relation :

$$I_T = I_P + I_D = V^{-1} \quad (3-38)$$

où V est la matrice de covariance de l'estimation.

Considérons l'identification d'un système dont le modèle est réduit au gain statique g , (figure 2).

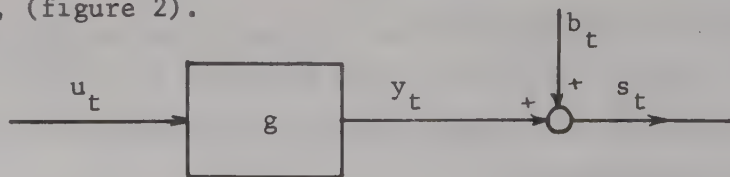


Fig. 2

Pour simplifier les calculs, supposons que l'entrée u_t est constante et égale à 1.

L'estimation de g est faite en présence d'un bruit b_t suivant la loi normale $N(0, \sigma_b)$.

Soit $p(g)$ une densité de probabilité a priori gaussienne, notée :

$$p(g) = N(0, \sigma_g^2)$$

Calculons successivement I_P et I_D :

$$I_P = E \left[- \frac{\partial^2 \text{Log } p(g)}{\partial g^2} \right]$$

$$I_P = \frac{1}{\sigma_g^2}$$

$$I_D = E \left[- \frac{\partial^2 \text{Log } p(s_1, s_2, \dots, s_N/g)}{\partial g^2} \right]$$

$$I_D = \frac{N}{\sigma_b^2}$$

Sachant que :

$$p(s_1, \dots, s_N/g) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b} \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{s_i - g}{\sigma_b} \right)^2$$

Par suite, on a :

$$I_T = \frac{1}{\sigma_g^2} + \frac{N}{\sigma_b^2} = \frac{1}{\sigma_{\hat{g}}^2} \quad (3-39)$$

où $\sigma_{\hat{g}}^2$ est la variance a postériori (conditionnellement aux mesures).

Admettons que l'on désire estimer g avec une précision définie par un écart type $\sigma_{\hat{g}} = \frac{\sigma_b}{10}$, il vient :

$$\frac{1}{\sigma_g^2} + \frac{N}{\sigma_b^2} = \frac{100}{\sigma_b^2} \quad (3-40)$$

- Première hypothèse :

On ne dispose d'aucune information a priori, c'est-à-dire, on a :

$$I_P = 0 \iff \sigma_g \rightarrow \infty$$

De l'équation (3-40) on déduit immédiatement qu'il faudra $N = 100$ données (u_t, s_t) pour obtenir la précision souhaitée.

- Deuxième hypothèse :

La variance de l'estimation initiale est $\sigma_g = \frac{\sigma_b}{10}$; de la relation (3-40) on tire $N = 0$. Il n'est plus nécessaire de faire aucune mesure puisque l'information a priori fournit une estimation initiale dont la précision est déjà celle que l'on souhaite obtenir.

- Troisième hypothèse :

On dispose d'une certaine information a priori $I_P = \frac{1}{\sigma_g^2}$, on déduira alors de l'équation (3-40) le nombre N de données nécessaires, ($0 < N < 100$). Cette expression met également en évidence le rôle joué par chacun des deux types d'information.

De cet exemple, il ressort que, pour une précision donnée, plus on dispose d'informations a priori, plus le temps d'identification sera court (ici mesuré par N), équation (3-40). De même, plus on disposera d'informations (I_T), plus l'estimation sera précise (σ_g petit), équation (3-39).

Le support mathématique que représentent les matrices d'information I_D et I_P permet de concevoir sans difficultés un raisonnement analogue, en considérant la relation (3-38), lorsqu'il s'agit de l'estimation d'un paramètre vectoriel.

IV-2 Prise en compte des connaissances a priori concernant l'estimation des séquences de pondération

L'instabilité de la déconvolution est essentiellement caractérisée par l'allure en "dent de scie" des réponses impulsionnelles, tracées point par point, à partir des séquences de pondération estimées. Il est alors souvent indispensable de disposer d'un grand nombre de données (u_t, s_t) pour obtenir des résultats significatifs. Etant donné, qu'en général, les algorithmes mis en oeuvre sont au moins "convergeants", on est assuré du lissage de ces courbes lorsque le nombre de données N est suffisamment grand.

Néanmoins, du point de vue pratique, il peut arriver, soit qu'on dispose d'un enregistrement insuffisant (cas, par exemple, de processus industriels lents), soit qu'une telle identification conduise à une quantité prohibitive de calculs.

Statistiquement parlant, ce "lissage" nécessite, pour être réalisé, une certaine quantité d'informations définies par la matrice I_T qui peut être obtenue par les données (matrice I_D) ou / et par des connaissances a priori (matrice I_P). Par opposition aux méthodes classiques, nous proposons que ce "lissage" incombe aux informations a priori qui en l'occurrence restent implicites et concernent des propriétés analytiques du noyau des systèmes linéaires. A partir de cette idée, nous exposons comment déterminer une structure adéquate de la matrice $P_{o/o} = I_P^{-1}$. Par ailleurs, on peut introduire par l'intermédiaire de l'initialisation ($\hat{h}_{o/o}, P_{o/o}$) des résultats relatifs, par exemple, à des expériences antérieures, $|7|$, $|8|$.

Outre le naturel avec lequel des connaissances a priori peuvent être prise en compte (initialisation d'un algorithme récurrent), cette méthode permettra de réduire considérablement le temps d'identification.

IV-2-1 Matrice de covariance initiale $P_{o/o}$

L'absence de connaissances a priori, nous l'avons vu, revient à considérer les coefficients de pondération h_t comme des variables aléatoires indépendantes de variance infinie, auquel cas nous aurions une matrice $P_{o/o} = \infty$ **1.**

Or, nous savons que les systèmes linéaires stationnaires usuellement utilisés en automatique, c'est-à-dire, ceux dont la transmittance est une fraction rationnelle de la variable s (de Laplace), ont une réponse impulsionnelle $h(t)$, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui s'écrit explicitement :

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{-\nu_i t} ; \mu, \nu \in \mathbb{C} \text{ (corps des complexes)} \quad (3-41)$$

Si l'on considère maintenant des instants discrets $t_k = kT$, on sait que $h(t_k)$ est solution d'une équation récurrente d'ordre n :

$$h(t_k) + a_1 h(t_{k-1}) + \dots + a_n h(t_{k-n}) = 0 \quad (3-42)$$

La suite $h(t_k)$ peut donc représenter la séquence de pondération d'un système discret linéaire dont la transmittance en Z est aussi une fraction rationnelle et de la forme $\frac{N(z)}{1+a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$. Par conséquent, les coefficients de pondération h_t , d'une part, ne sont pas indépendants mais sont solution d'une équation de la forme (3-42), et, d'autre part, la séquence h_t , ($t=1, \dots, m$) peut représenter l'échantillonnage d'une certaine fonction $h(t)$, continue, et à dérivées continues (somme d'exponentielles) dont la courbe représentative est parfaitement lisse. Ce sont ces informations a priori, implicites, que l'on va exprimer par l'intermédiaire de la matrice de covariance $P_{o/o}$ dont il s'agit de déterminer la structure appropriée.

$$\text{Soit : } \underline{e} = \underline{h} - \underline{\hat{h}}_{o/o}$$

la variable centrée relative à $\underline{h}$, de composante e_t ($t=1, 2, \dots, m$).

$$\text{Par suite : } P_{o/o} = E(\underline{e} \underline{e}^T)$$

Nous pouvons considérer maintenant que e_t est l'échantillonnage d'une fonction aléatoire $e(t)$, qui, en raison de ce qui précède, doit être continue et à dérivées successives continues. Pour déterminer la corrélation de $e(t)$, nous allons simuler un signal aléatoire ayant les mêmes propriétés, à

l'aide du modèle de la figure 3.

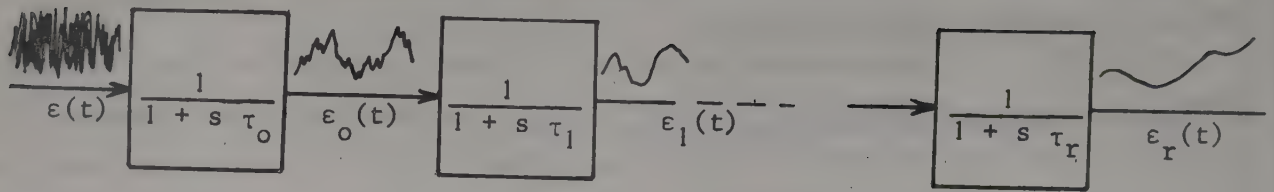


Fig. 3

Nous y définissons un bruit blanc $\varepsilon(t)$ de densité spectrale constante et égale à 1 ; $\varepsilon(t)$ est par conséquent un signal discontinu de variance infinie. Une fois filtré par une constante de temps (τ_0), nous obtenons un signal $\varepsilon_0(t)$ continu, à dérivée première discontinue et de variance finie. Filtrons une deuxième fois $\varepsilon(t)$, nous obtenons un signal $\varepsilon_1(t)$ continu à dérivée première continue. Par filtrages successifs, on peut obtenir un signal $\varepsilon_r(t)$ continu et à dérivée continue jusqu'à l'ordre r , dont la fonction d'auto-corrélation s'écrit :

$$\phi_{\varepsilon_r}(t) = \underbrace{[\eta_0(t) * \eta_0(-t)] * [\eta_1(t) * \eta_1(-t)] * \dots * [\eta_r(t) * \eta_r(-t)]}_{r+1 \text{ termes}} * \delta(t) \quad (3-43)$$

où η_i est la réponse impulsionnelle du filtre $\frac{1}{1+s\tau_i}$, le symbole $*$ désignant le produit de convolution.

Posons :

$$f_i(t) = \eta_i(t) * \eta_i(-t)$$

Il vient alors :

$$\phi_{\varepsilon_r}(t) = f_0(t) * f_1(t) * \dots * f_r(t) \quad (3-44)$$

Désignons maintenant par $F_i(j\omega)$ la transformée de Fourier de $f_i(t)$, on a :

$$F_i(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2 \tau_i^2}$$

En application du théorème central - limite [9], la fonction d'auto-corrélation $\phi_{\varepsilon_r}(t)$ tend vers une fonction de Gauss $a e^{-bt^2}$ lorsque r tend vers l'infini, sachant que $F_i(j\omega)$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &< F_i(0) < 0 \\ F_i'(0) &< \infty \\ 0 &< -F_i''(0) < \infty \end{aligned}$$

Soit $\rho_r(t)$ la fonction de corrélation de $\varepsilon_r(t)$:

$$\rho_r(t) = \frac{\phi_{\varepsilon_r}(t)}{\phi_{\varepsilon_r}(0)} \quad (3-45)$$

Il vient donc :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_r(t) = e^{-bt^2}$$

que nous notons :

$$\rho(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\theta}\right)^2} \quad (3-46)$$

en raison de l'interprétation que nous pourrions faire du paramètre θ .

Désignons par σ^2 la variance de e_t , compte tenu de (3-46) la matrice $P_{o/o}$ sera de la forme :

$$[P_{o/o}]_{ij} = \sigma^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i-j}{\theta}\right)^2} \quad (3-47)$$

Un calcul immédiat montre que :

$$\frac{\sigma}{\theta} = \sqrt{-\frac{\sigma^2 d^2 \rho(t)}{dt^2} \Big|_{t=0}} \quad (3-48)$$

$\frac{\sigma}{\theta}$ apparaît donc comme l'écart type de la dérivée de $e(t)$ que nous désignons par le vocable "pente type" dont la signification géométrique apparaît immédiatement à la figure 4.

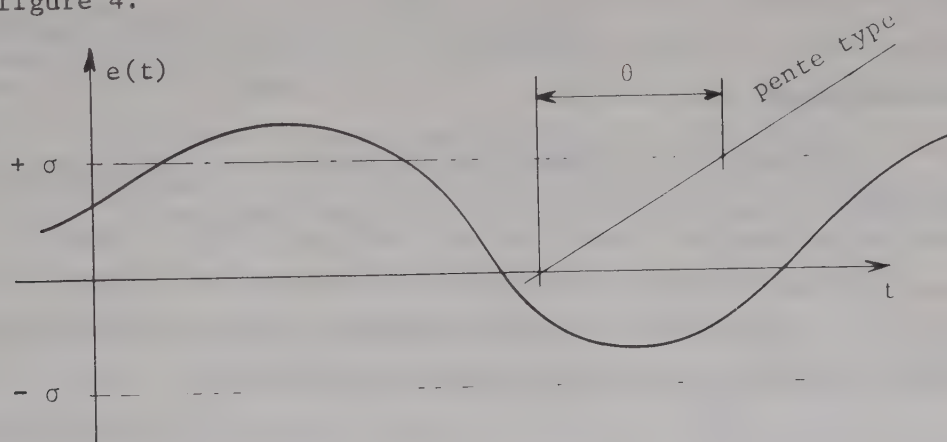


Fig. 4

Le couple (σ, θ) permet alors de déterminer, pour une probabilité donnée, de combien s'écarteront au maximum les différences premières de la séquence exacte $\underline{h}$, de la séquence initiale $\underline{\hat{h}}_{o/o}$.

Le paramètre θ résume les informations relatives à la corrélation exis-

tant entre les coefficients de pondération h_t (équation 3-46) ; il paraît donc naturel de parler de coefficient de "continuité" ou de "lissage" pour définir ce dernier. Cependant, c'est la notion de "pente type" (définie par $\frac{\sigma}{\theta}$) qui rend mieux compte du rôle qu'on peut lui attribuer.

En effet, admettons que le graphe de h_t soit constitué d'une suite de segments de droite (hypothèse reprise en détail § V) joignant les points de coordonnées (kT, h_k) , et prenons $\hat{h}_{0/0} = 0$. Alors la pente même de ces segments de droite, $\frac{h_{k+1} - h_k}{T} = p_k$, est bornée pour une probabilité donnée par un terme en $\beta \frac{\sigma}{\theta}$. Nous constatons donc qu'en l'absence d'informations a priori ($\theta = 0$), p_k peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ avec une égale probabilité, ce qui conduit aux graphes bien connus en "dent de scie". Au contraire, une valeur appropriée de $\frac{\sigma}{\theta}$, finie, contribuera à limiter ces changements de pente ératiques, pour ne conserver que ceux propres à l'évolution de la réponse du système (lissage).

On déduira alors une valeur de θ , connaissant σ , à partir de la "pente type" relativement aisée à déterminer. En fait, on devrait faire intervenir les dérivées successives "type" pour déterminer d'une façon précise le paramètre θ . Cependant, on sacrifiera la rigueur à la simplicité et on s'en tiendra à la relation $\frac{\sigma}{\theta}$ en notant que θ devra rester inférieur à une certaine valeur θ_M de sorte que h_1 et h_m conservent une corrélation négligeable.

IV-2-2 Estimation initiale $\hat{h}_{0/0}$

Cette estimation initiale résume les informations quantitatives relatives aux systèmes à identifier, et peuvent être issues, soit d'expériences antérieures, soit de calculs approchés. Nous laissons donc à chacun le soin de la définir au mieux.

Cependant, il arrivera assez souvent qu'on ne dispose pas de telles informations, aussi initialisera-t-on l'algorithme par $\hat{h}_{0/0} = 0$.

Dans un tel cas, l'écart type σ doit :

- d'une part, être suffisamment grand pour définir un intervalle de confiance contenant la séquence exacte (inconnue)
- d'autre part, être choisi "au plus juste" de façon que la notion de pente type conserve sa signification, compte tenu de la contrainte que nous avons imposée à θ .

Notons, dans le cas des systèmes asymptotiquement stables, que la séquence de pondération tend vers une valeur voisine de zéro lorsque k tend vers m . Pour prendre en compte cette information, on adopte un écart type décroissant lorsque k augmente, permettant, d'une part, de traduire la certitude que h_k tend

vers zéro, et, d'autre part, d'assurer une pente type s'adaptant à la configuration de la courbe représentative de la séquence de pondération. En effet, en conservant un écart type constant, celui-ci serait exagérément grand en fin de réponse et, par suite, le lissage qu'on pouvait obtenir au début de la courbe, disparaîtrait au fur et à mesure que k augmente.

Nous proposons à cet effet de prendre :

$$\sigma_k = \sigma_1 e^{-\frac{k-1}{\alpha}} ; k=1, \dots, n \quad (3-49)$$

qui, en raison de la forme choisie, permet d'assimiler α à la plus grande constante de temps du système, figure 5. Il est alors aisé, connaissant m , de trouver une valeur adéquate de paramètre α . On définit ainsi une enveloppe de confiance, plus précise, de l'estimation initiale, correspondant à ce type de système.

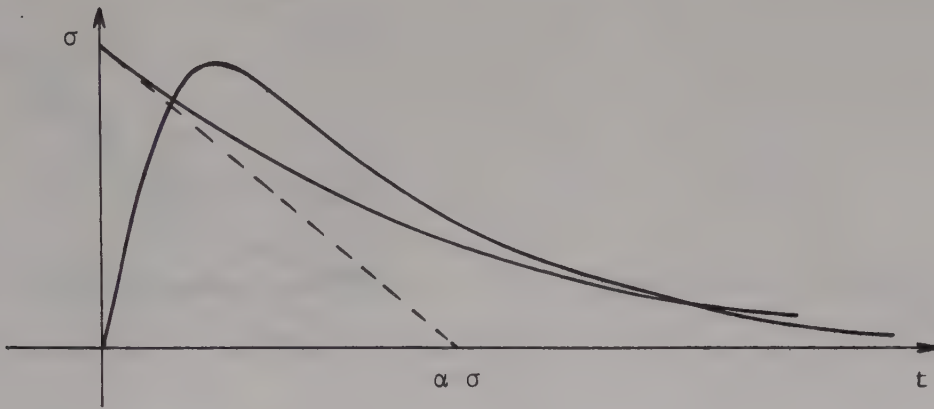


Fig. 5

IV-2-3 Systèmes à transmission non instantannée

En général, les systèmes physiques ne répondent pas instantannément aux sollicitations qu'ils subissent. Dans cette hypothèse, on sait avec certitude que leur réponse impulsionnelle est nulle à l'instant initial. Cependant, par suite des erreurs d'arrondi intervenant dans l'algorithme d'estimation, et surtout en raison de la présence de perturbations sur la sortie, on n'est nullement assuré d'obtenir une estimation $\hat{h}_1 = 0$ (indépendamment de la nature du processus, discret ou continu, où dans ce dernier cas viennent s'ajouter les erreurs dues à l'échantillonnage cf § III).

C'est pourquoi nous exposons comment tenir compte de cette information a priori.

Une première solution consisterait à supprimer l'estimation du paramètre h_1 , et à considérer les données (u_{t-1}, s_t) , puisque l'équation du système s'écrirait :

$$s_t = 0 \cdot u_t + h_2 u_{t-1} + \dots + h_m u_{t-m+1} + b_t$$

c'est-à-dire :

$$s_t = \underline{\tilde{h}} \underline{\tilde{u}}_{t-1}^T + b_t \quad (3-50)$$

où :

$$\underline{\tilde{h}}^T = [h_2, \dots, h_m] ; \quad \underline{\tilde{u}}_{t-1} = [u_{t-1}, \dots, u_{t-m+1}]$$

Cette solution n'est pas satisfaisante, car, en opérant ainsi, les coefficients $h_2, h_3, \dots, h_m$ sont estimés en supposant qu'ils ont une corrélation nulle avec $h_1 = 0$, ce qui est assurément faux d'après la relation (3-42), p.77. Géométriquement, ceci signifie qu'on ramènerait à l'origine le point représentatif de h_1 sans décaler le reste de la courbe, figure 6-a, alors qu'il serait souhaitable d'opérer le raccordement que l'on ferait intuitivement à la main, figure 6-b.

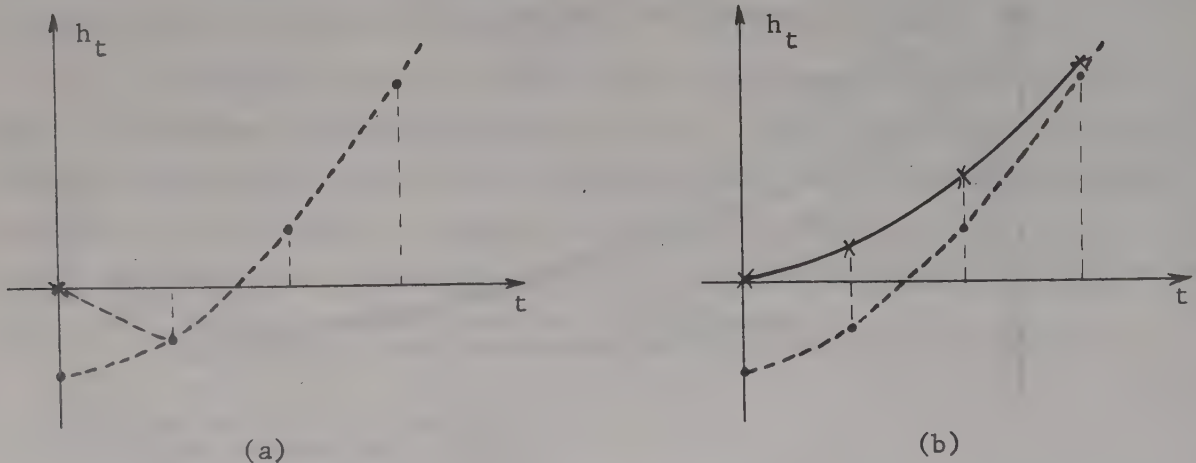


Fig. 6

Nous exposons maintenant comment réaliser ce "raccordement" à l'aide d'un artifice très simple. Soit $\underline{h}^*$ une estimation de $\underline{h}$ et P^* sa matrice de covariance associée ; il s'agit de calculer $\underline{\tilde{h}}$ et $\tilde{P}$, où $\underline{\tilde{h}}$ est la séquence après correction du terme h_1 et $\tilde{P}$ sa matrice de covariance.

Considérons une mesure (fictive) u_t, s_t , où s_t est non bruité, c'est-à-dire $\sigma_b = 0$, et telle que :

$$s_t = 0$$

$$u_j = \begin{cases} 1 & ; j = t \\ 0 & \forall j \neq t \end{cases}$$

L'équation du système s'écrit alors :

$$0 = h_1 \times 1 + h_2 \times 0 + \dots + h_m \times 0 \quad (3-51)$$

En appliquant les équations de filtrage (3-9), p 66, à cette "nouvelle mesure", on obtient alors une estimation $\underline{\tilde{h}}$, telle que, d'une part, h_1 soit nul

avec certitude et, d'autre part, telle que les autres composantes $h_2, \dots, h_m$ soient modifiées en conséquence de leur corrélation avec h_1 définie par la matrice P^* .

Explicitons les équations (3-9) dans ce cas particulier, avec $\sigma_b = 0$; il vient :

$$\underline{\tilde{h}} = \underline{h}^* + P^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ([1, 0, \dots, 0] P^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} (0 - [1, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} h_1^* \\ \vdots \\ h_m^* \end{bmatrix})$$

$$\underline{\tilde{h}} = \underline{h}^* - \frac{h_1^*}{P_{11}^*} \begin{bmatrix} P_{11}^* \\ P_{21}^* \\ \vdots \\ P_{m1}^* \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2^*(1 - \rho_{21}) \\ \vdots \\ h_m^*(1 - \rho_{m1}) \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

$$\text{où : } \rho_{i1} = \frac{P_{i1}^*}{P_{11}^*} \text{ (coefficient de corrélation)} \quad (3-53)$$

De même, on obtient :

$$\underline{\tilde{P}} = P^* - \frac{1}{P_{11}^*} \begin{bmatrix} P_{11}^* \\ P_{21}^* \\ \vdots \\ P_{m1}^* \end{bmatrix} [P_{11}^*, P_{12}^*, \dots, P_{1m}^*]$$

Soit :

$$\underline{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & P_{ij}^* & - \frac{P_{i1}^* P_{j1}^*}{P_{11}^*} & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

L'équation (3-52) réalise la correction des termes $h_2, \dots, h_m$ en raison de la corrélation existant entre h_1 et h_i , $i = 2, \dots, m$; ce qui se traduit géo-

métriquement par le raccordement de la figure 6-b ; et l'expression (3-54) donne la matrice de covariance de la nouvelle estimation $\hat{\underline{h}}$.

Remarques - Une méthode analogue pourrait être appliquée au coefficient h_m si l'on désirait raccorder la séquence de pondération rigoureusement à zéro en fin de réponse.

Pour les systèmes multivariés, il convient d'opérer successivement pour chacune des séquences $\underline{h}^{ij}$ à laquelle on applique cette méthode.

V - ECHANTILLONNAGE A PAS VARIABLE -

La plupart du temps, le modèle discret à estimer est le résultat de l'échantillonnage d'un processus continu. La dimension du vecteur $\underline{h}$ est alors directement liée au pas de discrétisation et résulte d'un compromis entre une représentation fine du système continu et un nombre de coefficients de pondération prohibitif. L'expérience montre qu'en fonction de l'environnement du processus, le choix d'un pas adéquat permet de représenter une séquence de pondération par ses 30 ou 40 premiers points au maximum. Lorsqu'il s'agit de modèles monovariés, la mise en oeuvre des équations de filtrage conduit à des temps de calcul par itération encore raisonnable, même sur petit calculateur [10]. Cependant, il peut en être tout autrement dans le cas de modèle multivariable où le nombre de paramètres peut se compter par centaines. Outre les difficultés d'ordre numérique qui pourraient surgir par suite d'accumulation d'erreurs d'arrondi, et le fait qu'il serait en général nécessaire de faire appel à des mémoires auxiliaires (bandes, disques), le temps de calcul qui, rappelons-le, croît comme le carré du nombre de paramètres à estimer, rendrait impossible toute exploitation en ligne et, prohibitif, le coût de l'identification. Pour éviter de limiter trop sévèrement le champ d'application de l'algorithme, nous proposons une technique permettant de réduire le nombre de coefficients de pondération nécessaire à la représentation du système et donc la taille du problème à résoudre [4], [11].

V-1 Principe de la méthode

Nous avons vu que la séquence de pondération h_t pouvait être considérée comme l'échantillonnage d'une certaine fonction $h(t)$ dont la courbe représentative est parfaitement lisse. En raison du choix du pas d'échantillonnage T , on peut approcher cette courbe (tracée point par point à partir de h_t) par des segments de droite. Voyons ce qu'implique cette approximation du point de vue analytique. Développons $h(t)$ en série de Taylor :

$$h(t+\tau) = h(t) + \tau h'(t) + \frac{\tau^2}{2!} h''(t) + \dots + \frac{\tau^n h^{(n)}(t)}{n!} + \dots$$

$$h(t+\tau) = h(t) + \tau h'(t) + Q[t, \tau, h^{(j)}(t)] \quad (3-55)$$

Il vient alors, au premier ordre :

$$h(t+T) \approx h(t) + T h'(t) \quad \forall t \quad (3-56)$$

Par conséquent, T est une valeur de τ pour laquelle le maximum de Q par rapport à t reste négligeable, soit Q_m cette quantité qui, en quelque sorte, caractérise la précision maximale avec laquelle on approche cette courbe. Pour exploiter au mieux cette approximation, il faudrait faire varier le pas d'échantillonnage de telle sorte que Q reste constant et égal à Q_m , ce qui permettrait de représenter $h(t)$ par un nombre de points inférieur à m . Ceci est bien sûr irréalisable puisqu'il faudrait connaître les résultats $\hat{h}_t$ par avance. En fait, en ce qui concerne les systèmes asymptotiquement stables, on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^n h(t)}{dt^n} = 0 \quad \forall n$$

qui peut être approché par :

$$\left. \frac{d^n h(t)}{dt^n} \right|_{t=mT} \approx 0 \quad \forall n \quad (3-57)$$

en raison de la définition de m . En pratique, il convient de conserver un pas constant et égal à T jusqu'à un certain instant vT afin d'identifier correctement les dynamiques puis, lorsque le système excité par une impulsion revient au repos, d'opérer avec un pas jT ($j > 1$) croissant au fur et à mesure que t augmente. On retrouve là une conclusion analogue à celle du § III, ch 1.

En transposant ces résultats à la séquence h_t , on peut dire qu'il existe un indice v tel que les différences successives de h_t soient petites et décroissent pour devenir approximativement nulles pour $t = m$. En termes géométriques, ceci signifie que des points tels que (A, B, C) , puis $(C, D, E, F) \dots$ sont presque alignés, (figure 7). En fait, l'ordonnée de ces points est entachée d'une imprécision caractérisée par l'écart type relatif à $\hat{h}_t$, de sorte qu'en général les points $B', D', E' \dots$ obtenus en remplaçant les segments curvilignes $A B C$ et $C D E F$ par les cordes $A B' C$ et $C D' E' F \dots$ seront aussi vraisemblables que les points $B, D, E \dots$. On peut donc représenter le système par une séquence h_t^* dans laquelle les points $B, D, E \dots$ sont remplacés par leurs interpolés $B', D', E' \dots$. Désignons par h_t , h_{t+1} et h_{t+2} les ordonnées de A , B et C , le principe de notre méthode consiste à supprimer l'estimation du paramètre h_{t+1} et de la remplacer par :

$$\hat{h}_{t+1} = \frac{\hat{h}_t + \hat{h}_{t+2}}{2} \quad (3-58)$$

Ce que l'on vient d'exposer sur la base de 3 points (A,B,C) s'étend immédiatement à un nombre quelconque de points.

La séquence de pondération initialement définie par m coefficients h_t est alors entièrement caractérisée par un nombre $m' < m$ de coefficients h'_t représentant les ordonnées des extrémités des segments de droite, tels les points A, C et F.

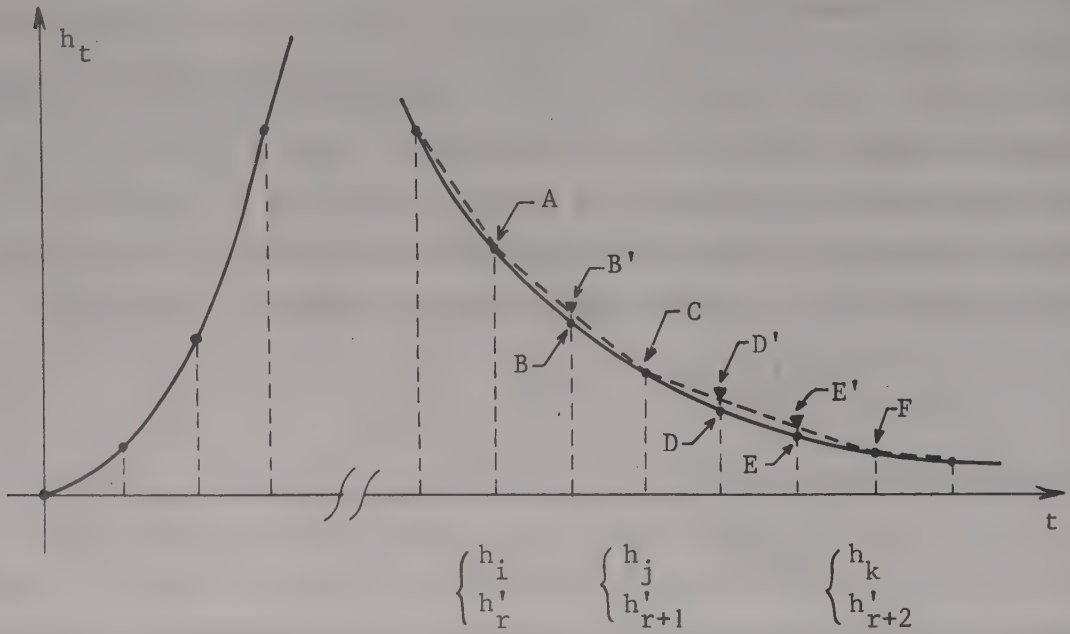


Fig. 7

V-2 Algorithme modifié

Rappelons que h_t est la séquence originale formant les composantes du vecteur $\underline{h}$:

$$\underline{h}^T = [h_1, h_2, \dots, h_m]$$

On a défini une séquence h_t^* , soit :

$$\underline{h}^{*T} = [h_1^*, h_2^*, \dots, h_m^*]$$

déduite de la séquence h_t dans laquelle certains points B, D, E... ont été remplacés par B', D', E'... (figure 7) et telle que l'équation du système puisse s'écrire encore :

$$s_t = \underline{h}^{*T} \underline{u}_t + b_t \quad (3-59)$$

Soit, enfin, la séquence h'_t , notée vectoriellement :

$$\underline{h}'^T = [h'_1, h'_2, \dots, h'_r, h'_{r+1}, h'_{r+2}, \dots, h'_m] \quad (3-60)$$

L'identification du système se réduit alors à l'estimation du sous vecteur $\underline{h}'$ de $\underline{h}^*$ de dimension $m' < m$.

Considérons les 3 coefficients de pondération successifs h'_r , h'_{r+1} et h'_{r+2} séparés respectivement par les intervalles de temps $(j-i)T$ et $(k-j)T$.

Nous avons, d'une part :

$$\begin{aligned} h'_r &= h_i^* = h_i \\ h'_{r+1} &= h_j^* = h_j \\ h'_{r+2} &= h_k^* = h_k \end{aligned} \quad (3-61)$$

D'autre part, compte tenu de l'hypothèse d'interpolation linéaire, les coefficients h_t^* pour $i < t < j$ et h_v^* pour $j < v < k$ sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} h_t^* &= \frac{(j-t)h'_r + (t-i)h'_{r+1}}{j-i} \\ h_v^* &= \frac{(k-v)h'_{r+1} + (v-j)h'_{r+2}}{k-j} \end{aligned} \quad (3-62)$$

D'une façon plus générale, la relation entre $\underline{h}^*$ et $\underline{h}'$ peut s'écrire :

$$\underline{h}^* = M \underline{h}' \quad (3-63)$$

où M est une matrice de la forme suivante :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} r \\ \downarrow \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} r+1 \\ \downarrow \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} r+2 \\ \downarrow \\ | \\ | \\ | \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \frac{p-1}{p} & \frac{1}{p} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \frac{p-s}{p} & \frac{s}{p} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{q-1}{q} & \frac{1}{q} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \frac{q-l}{q} & \frac{l}{q} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow t = i+s \\ \leftarrow j = i+p \\ \leftarrow v = j+l \\ \leftarrow k = j+q \end{array}$$

Nous avons :

$$s_t = \underline{u}_t^T \underline{h}^* + b_t$$

qui maintenant devient, d'après (3-63) :

$$s_t = \underline{u}_t^T M \underline{h}' + b_t$$

$$s_t = (M^T \underline{u}_t)^T \underline{h}' + b_t$$

Définissons une entrée "équivalente" relative à la séquence $\underline{h}'_t$:

$$\underline{u}'_t = M^T \underline{u}_t \quad (3-64)$$

Il vient :

$$s_t = \underline{u}'_t^T \underline{h}' + b_t \quad (3-65)$$

qui est précisément de la même forme que (3-4), p64.

On peut donc estimer $\underline{h}'$ de la même manière que $\underline{h}$ en utilisant les équations de filtrage développées au § III de ce chapitre.

A ces équations il sera nécessaire d'ajouter la relation (3-64) ; ce supplément de calcul est cependant largement compensé par la réduction du nombre de paramètres à estimer.

Celle-ci dépend bien sûr de la façon dont on fait évoluer le "pas d'échantillonnage variable", γT . Pour notre part, nous avons utilisé une méthode simple (et qui s'est révélée efficace), consistant à conserver $\gamma = 1$ pendant un certain nombre de pas $\nu > 1$, puis d'incrémenter γ par unité de 1 à μ ; μ étant déterminé de façon à ce que $\underline{h}'$ représente la séquence $\underline{h}$ en entier. Dans ce cas, la réduction du nombre de paramètres est donnée par :

$$\frac{\nu + \mu(\mu+1)/2}{\nu + \mu} = \frac{m}{m'} \quad (3-66)$$

Remarques -

- En ce qui concerne les systèmes comportant une intégration, on estimera une séquence $\underline{g}'$ au lieu de $\underline{g}$ (définie au § III-4) à partir de laquelle on pourra estimer la séquence réelle $\underline{h}^*$ en posant :

$$\underline{h}^* = A \underline{g}^*$$

$$\underline{g}^* = M \underline{g}'$$

avec $A = \begin{bmatrix} 1 & . & 0 \\ . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de covariance de $\underline{h}^*$ sera donnée par :

$$P_h = A M P_g M^T A^T$$

- Le calcul du gain statique pour les systèmes asymptotiquement stables sera obtenu de la même manière que dans le cas d'échantillonnage à pas constant, à partir de la séquence $\underline{h}^*$ et non plus $\underline{\hat{h}}$. Il vient :

$$\hat{Y} = [1 \dots 1] M \underline{h}'$$

$$\sigma_Y^2 = [1 \dots 1] M P M^T [1 \dots 1]^T$$

P étant la matrice de covariance de $\underline{h}'$.

VI - DETERMINATION D'UN MODELE MARKOVIAN DES PERTURBATIONS -

Lorsque nous avons développé les différentes phases de l'algorithme d'estimation, basé sur le filtrage de Kalman, nous avons supposé connu les paramètres caractérisant l'environnement stochastique du processus. En particulier, lorsque nous avons abordé l'identification en présence de perturbations colorées, nous avons admis d'une part, qu'elles étaient susceptibles d'être représentées par un modèle autorégressif d'ordre p :

$$b_t = c_1 b_{t-1} + c_2 b_{t-2} + \dots + c_p b_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3-67)$$

et, d'autre part, que les paramètres $c_1, c_2, \dots, c_p$ et σ_b^2 (variance de ε_t) étaient connus. Si la première hypothèse est relativement assez générale [11], il n'en est pas de même pour la seconde où dans la pratique ces quantités doivent être également estimées. L'identification simultanée du système et de son environnement présente des difficultés. En effet, l'équation reliant entrée et sortie :

$$s_t = \underline{a}_t^T \underline{x}_t$$

est alors non linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues en raison des produits $c_i b_{t-i}$. Nous proposons de décomposer ce problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires de la manière suivante.

Considérons une valeur initiale des paramètres c_i et σ_b à partir de laquelle on estime le vecteur d'état généralisé $\underline{x}_t$ (défini au § III) par filtrage. Soit $\underline{\hat{x}}$ l'estimation obtenue, on calcule alors l'écart entre sortie mesurée et sortie prédite :

$$\hat{b}_t = s_t - s_t(\underline{\hat{x}}) \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Il reste à déduire les paramètres c_i et σ_b de la suite $\hat{b}_t$, problème sur lequel nous reviendrons un peu plus loin. On itère ensuite le procédé comme

l'indique l'organigramme de la figure 8.

Il reste maintenant à initialiser ces paramètres. Il est, en général, assez difficile d'avoir des informations précises sur les coefficients c_i , aussi nous les supposons initialement nuls, ce qui revient à faire une première identification avec l'hypothèse de bruits pseudo blancs. Il est ensuite relativement aisé d'initialiser la variance du bruit à la simple vue de l'enregistrement de la sortie, une erreur dans un rapport 1 à 10 n'étant pas primordiale.

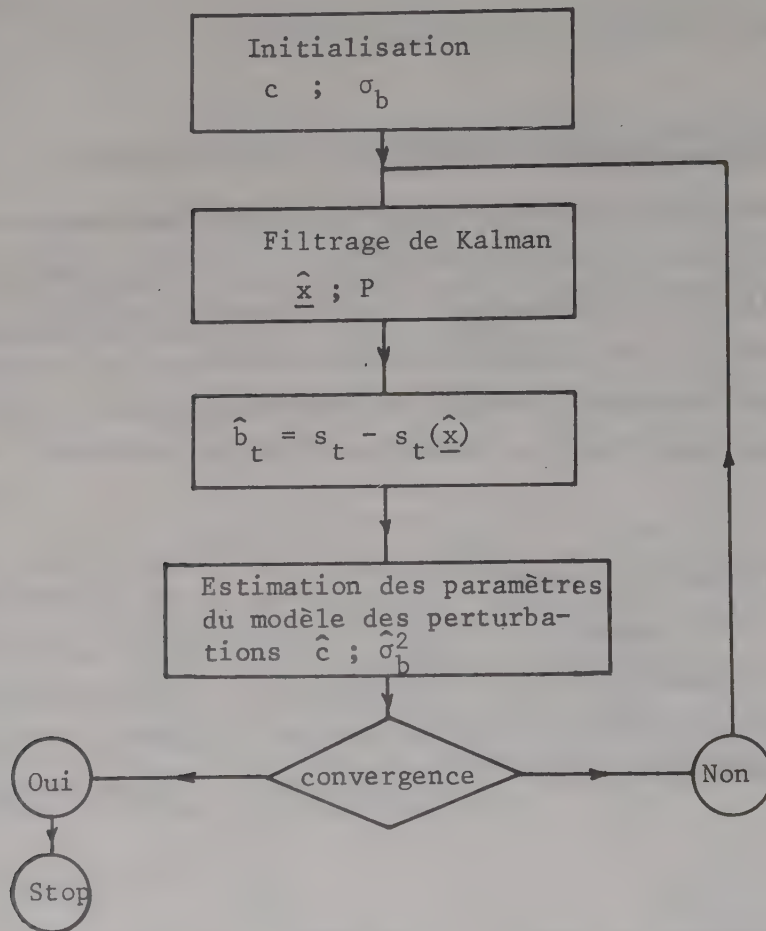


Fig. 8

VI-1 Estimation des paramètres du modèle autorégression

Une approche classique [12] consiste à déterminer les coefficients c_i par la méthode des moindres carrés, en minimisant la somme des carrés des résidus :

$$\hat{b}_t - (c_1 \hat{b}_{t-1} + \dots + c_p \hat{b}_{t-p}) = \epsilon_t \quad t = p+1, \dots, N$$

Regroupons ces équations sous forme matricielle, il vient :

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{p+1} \\ \vdots \\ \hat{b}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_p & \dots & \hat{b}_1 \\ \hat{b}_{p+2} & \dots & \hat{b}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{N-1} & & \hat{b}_{N-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{p+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

que nous écrirons :

$$\underline{\hat{b}} = B \underline{c} + \underline{\varepsilon} \quad (3-68)$$

L'estimation des moindres carrés (voir ch 2, § II) conduit à l'estimation :

$$\underline{\hat{c}} = (B^T B)^{-1} B^T \underline{\hat{b}}$$

qui converge en moyenne quadratique vers la valeur exacte $\underline{c}$ lorsque N tend vers l'infini, en particulier si le résidu ε_t est une séquence indépendante, cf [10].

Par ailleurs, on a immédiatement une estimation de σ donnée par :

$$\hat{\sigma}_b = \frac{1}{N-p} ||\underline{\hat{b}} - B \underline{\hat{c}}||^2 \quad (3-69)$$

Cette méthode amène quelques remarques du point de vue pratique. L'ordre p du modèle reste inconnu. On pourrait bien sûr identifier des modèles d'ordre croissant et à l'aide d'un test adéquat déterminer la valeur optimale de p , [12]. Seulement, dans le contexte où nous opérons, on ne disposerait pas d'un nombre de données N suffisant pour pouvoir obtenir des valeurs significatives pour les paramètres c_i lorsque leur nombre augmente. Pour trouver une nouvelle orientation à ce problème, il convient de préciser dans quel esprit cette identification du bruit doit être conduite.

Il est significatif de constater que dans un grand nombre de méthodes on se contente de l'hypothèse de perturbations indépendantes. Néanmoins, celle-ci peut devenir insuffisante lorsque le bruit est fortement corrélé ; il est alors indispensable d'en tenir compte dans l'estimation du processus. Ajoutons à cela, le fait que l'écart $s_t - s_t(\underline{\hat{x}})$ est dû d'une part, à la présence réelle de perturbations inconnues sur la sortie, mais aussi au choix du modèle, (ici séquence de pondération *finie*), et enfin peut prendre en compte certaines non linéarités ou non stationnarités.

Autant d'arguments pour mettre en évidence l'inutilité d'essayer d'obtenir un modèle autorégressif complexe. Il est beaucoup plus réaliste de déterminer 1 ou 2 paramètres d'une structure simple permettant d'avoir des informations suffisamment significatives de la variance et de la corrélation du bruit.

VI-2 Un modèle approché

Le modèle le plus simple qu'on puisse prendre correspond au modèle autoregressif d'ordre 1 :

$$b_t = c b_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3-70)$$

dans lequel il faut déterminer le paramètre c et la variance du résidu ε_t .

Une application directe des équations (3-68) et (3-69) conduit à :

$$\hat{c} = \frac{\sum_{j=2}^N b_j b_{j-1}}{\sum_{j=2}^N b_{j-1}^2} \quad (3-71)$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^N (b_j - \hat{c} b_{j-1})^2 \quad (3-72)$$

Rappelons que la fonction d'autocorrélation de b_t déduite du modèle du 1er ordre, s'écrit :

$$\psi_b(n) = E(b_t b_{t+n}) = \frac{\sigma_b^2}{1-c^2} c^n \quad (3-73)$$

Il est bien évident qu'en raison de la simplicité, voulue, du modèle, la fonction d'autocorrélation $\psi_b(n)$ pourra s'écarter de la fonction d'autocorrélation expérimentale $\psi'_b(n)$ déduite de b_t , (figure 9).

Remarquons que l'estimation $\hat{c}$ (3-71) peut s'écrire :

$$\hat{c} = \frac{\psi'_b(1)}{\psi'_b(0)} \quad (3-74)$$

c'est-à-dire, ne dépend que des deux premiers points de $\psi'_b(n)$.

Pour compenser l'inexactitude du modèle et, par conséquent, estimer un paramètre c caractérisant mieux la corrélation de b_t , nous proposons de déduire une estimation $\hat{c}$ résultant de l'ajustement de l'exponentielle c^n sur les k premiers points de ψ'_b (au lieu de 2). Un tel ajustement peut s'obtenir en minimisant par exemple une somme de carrés d'écarts telle :

$$\sum_{j=1}^k [\psi_b(j) - \psi'_b(j)]^2$$

dont la minimisation par rapport à c se ferait par une méthode de programmation non linéaire (méthode du nombre d'or par exemple).

En raison de l'esprit dans lequel est établi ce modèle, une telle rigueur ne se justifie pas. Nous proposons de prendre pour $\hat{c}$ une valeur moyenne d'estimations de la forme (3-74) :

tion des différents développements que nous avons exposés, tant sur l'estimation proprement dite des séquences de pondération, par filtrage linéaire, que sur l'identification de l'environnement du processus.

Pour en clarifier la structure, ce dernier a été décomposé en sous programmes relatifs à des fonctions particulières :

- Prise en compte des connaissances a priori dans l'initialisation
- Prédiction de l'état généralisé $\underline{x}$
- Calcul de l'entrée "équivalente" $\underline{u}'_t$ (due à l'échantillonnage à pas variable)
- Estimation du vecteur d'état généralisé $\underline{x}$
- Calcul du gain statique des chaînes asymptotiquement stables
- Estimation des paramètres, caractéristiques du bruit (c, σ_b)
- Impression des résultats
- Tracés de courbe.

L'ensemble est structuré au sein d'un programme principal comportant une partie jouant le rôle d'un superviseur dans laquelle sont introduites les informations relatives au processus à identifier.

- nombre d'entrées et de sorties
- nature des conditions initiales sur l'entrée
- paramètre σ, θ, α relatif à chaque chaîne du système, répartition de l'échantillonnage à pas variable
- Existence éventuelle d'un intégrateur sur certaines chaînes
- Présence de composante continue
- Initialisation des paramètres c et σ_b .

L'élaboration du code a été particulièrement soignée en ce qui concerne l'encombrement mémoire et l'optimisation du temps de calcul.

A cet effet, signalons que la matrice Φ (définie à l'équation (3-15), p 67, ou Φ') n'est pas explicitée en raison de sa structure "creuse". Il en résulte un gain de temps, mais surtout un gain du volume mémoire. Pour la même raison, le calcul de l'entrée équivalente est fait directement à partir des équations (3-62), p 87, sans faire apparaître la matrice M . Notons encore que les matrices de covariances P étant symétriques, seules des demi matrices ont été prises en compte, là encore ce procédé conduit à un gain de place et de temps d'exécution.

En ce qui concerne la précision des calculs, ceux-ci sont exécutés en "simple précision" (7 chiffres décimaux exacts), à l'exclusion des produits scalaires où on a utilisé la technique de l'accumulateur "double précision" (16 chiffres significatifs). Précisons ce point. Soit le produit scalaire $\underline{x}^T \underline{y}$ à calculer, où $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des variables "simple précision". On a bien sûr :

$$\underline{x}^T \underline{y} = \sum_{i=1}^j x_i y_i$$

La méthode consiste à calculer chaque produit $x_i y_i$ en double précision puis, faire leur somme et, seulement après, convertir le résultat obtenu en une variable simple précision. On trouvera en [14] la justification de cette méthode et le gain de précision qu'il peut en résulter.

Une telle précaution n'est pas inutile, car, au cours des itérations, les termes diagonaux de la matrice $P_{k/k}$ décroissent comme $\frac{1}{k}$, et, en raison d'erreur d'arrondi, le calcul numérique de l'équation (3-20), p 68, peut se détériorer petit à petit et conduire à des matrices $P_{k/k}$ définies négatives (variances négatives par exemple!).

Ce programme a été mis en oeuvre pour un IBM 360-30, 64 k. Etant donné l'utilisation séquentielle des principales fonctions (sous programmes), la technique de l'OVERLAY permet l'estimation d'environ une centaine d' "états" sans faire appel à des mémoires auxiliaires.

C'est dans ces conditions qu'ont été conduits les nombreux tests dont nous présentons quelques uns des résultats les plus significatifs au chapitre suivant.

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | KALMAN R.E. and BUCY R.S. - "New Results in linear filtering and Prediction Theory"
Trans. ASME, Basic Eng. Vol 83, p. 95-108, 1961
- | 2 | RADIX J.C. - "Introduction au filtrage numérique"
Edition Eyrolles, 1970
- | 3 | De LARMINAT Ph. - "On line identification of time varying Systems"
TALLEC M.H. I.F.A.C. Prague, 1970
- | 4 | BARRAUD A. - "Process Identification using its Weighting Sequen-
De LARMINAT Ph. ces Matrix"
Présenté à l'I.F.A.C. Düsseldorf, 1971
- | 5 | GODIN P. - "Identification of multivariable linear systems
DAVOUST G. from input output data"
I.F.A.C. Düsseldorf, 1968
- | 6 | LINDENLAUB J.C. - "Noise limitation of system identification techni-
ques"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control Jan. 1963
- | 7 | De LARMINAT Ph. - "Une méthode pour la prise en considération des
BARRAUD A. connaissances a priori lors d'une identification"
Annales E.N.S.M. 2ème semestre 1969
- | 8 | BARRAUD A. - "Computation of Weighting Sequences from short
De LARMINAT Ph. Duration Measurements"
I.F.A.C. Kyoto, 1970
- | 9 | BRACEWEL R. - "The Fourier Transform and its Applications"
Mc Graw Hill Book Company, 1965
- | 10 | COGGAN G.C. and - "On line state estimation with a small computer"
WILSON J.A. The Computer Journal, Vol 14, n°1, Feb. 1971
- | 11 | TRETTET S.A. and - "Power spectrum identification in terms of rational
STEIGLITZ K. models"
I.E.E.E. Trans. Autom. Control, April 1967
- | 12 | ASTROM K.J. - "Lectures on the Identification Problem - the Least
Squares Method"
Report, Division of Automatic Control, Lund Insti-
tute of Technology, Lund, Sweden, 1968
- | 13 | COLLIN T. - "Emploi des méthodes d'identification dans l'indus-
trie chimique"
D.E.A. d'Automatique, Nantes, Juin 1970
- | 14 | WILKINSON J.H. - "Rounding errors in Algebraic Processes"
Notes on applied Science (1963).

Chapitre 4

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Pour tester systématiquement les propriétés pratiques de l'algorithme (chapitre 3) avant de passer à des applications réelles, nous avons effectué la simulation numérique de processus commandés par des entrées de types différents, la sortie étant perturbée par des signaux aléatoires de caractéristiques variées. L'intérêt de la simulation a été non seulement d'élaborer une procédure d'utilisation de l'algorithme, mais de justifier par avance les résultats des applications futures pour lesquelles on n'est jamais assuré de se trouver dans les circonstances exactes où la méthode d'identification est théoriquement optimale.

Nous présentons donc, dans une première partie, les résultats les plus significatifs, obtenus en simulation, relatifs aux différents points que nous avons développés (influence de la nature de l'entrée - initialisation de l'algorithme - échantillonnage à pas variable - estimation des perturbations).

La seconde partie est consacrée à l'identification de processus réels tant monovariables que multivariables (Alternateur - Avion Piaggio - Chaîne de surchauffe du générateur de vapeur pilote du laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M.).

I - SIMULATION NUMERIQUE DE PROCESSUS ET DE LEUR ENVIRONNEMENT -

On considère un système discret caractérisé par sa transmittance en Z $H(z)$ dont on se fixe les paramètres. La réalisation d'une identification en simulation nécessite l'élaboration d'une entrée et d'une perturbation additionnée à la sortie, celles-ci ont été obtenues par l'intermédiaire de bruits pseudo blancs gaussiens, filtrés. Cette méthode assure, en ce qui concerne les perturbations b_t , des propriétés statistiques connues exactement et par ailleurs permet d'obtenir une entrée u_t absolument quelconque. La figure 1 représente le schéma général de la simulation.

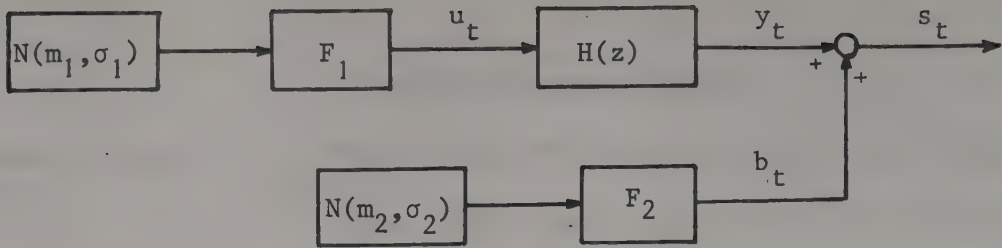


Fig. 1

La notation $N(p, \sigma)$ désigne, rappelons le, une variable aléatoire indépendante gaussienne de moyenne p et d'écart type σ , enfin les filtres F_1 et F_2 sont caractérisés par une transmittance en Z de la forme :

$$F = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Pour un processus donné, on est alors capable de simuler des conditions d'identification variées en agissant sur la "richesse" de l'entrée (par l'intermédiaire des paramètres du filtre F_1) et le rapport bruit sur signal défini par σ_b / σ_y ; ces quantités (σ_b et σ_y) désignent respectivement l'écart type de la perturbation b_t et l'écart type de la sortie du système y_t et peuvent être calculées connaissant d'une part m_2, σ_2, F_2 , et d'autre part m_1, σ_1, F_1 et $H(z)$.

La plupart des essais que nous avons réalisés ont été obtenus avec la simulation du système et de l'environnement définis figure 2.

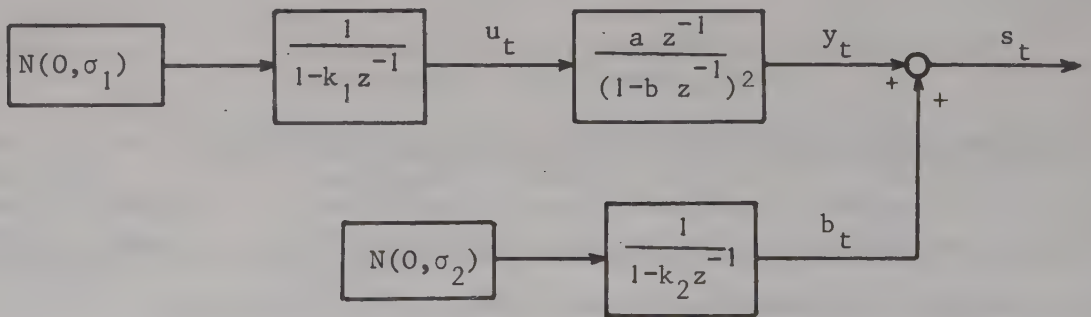


Fig. 2

Calculons la variance de y_t et celle de b_t .

Rappelons [1] que le rapport de la variance du signal de sortie sur celle du signal d'entrée d'un système de transmittance $H(z)$ est donné par l'intégrale :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{cercle unité}} H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (4-1)$$

Il vient donc, d'une part :

$$\frac{\sigma_b^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{2 \pi i} \oint \frac{z^{-1} dz}{(z - k_2) (z^{-1} - k_2)}$$

$$\frac{\sigma_b^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{1 - k_2^2} \quad (4-2)$$

et, d'autre part :

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{2 \pi i} \oint \frac{a^2 z^{-1} dz}{(z - k_1) (z - b)^2 (z^{-1} - k_1) (z^{-1} - b)^2}$$

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_1^2} = a^2 \frac{1 + b(b + 2 k_1) - b^4 k_1^2 - b^2 k_1 (k_1 + 2 b)}{(1 - b^2)^3 (1 - k_1 b)^2 (1 - k_1^2)} \quad (4-3)$$

Il est alors aisé une fois fixés les paramètres du système de générer une entrée u_t et un bruit b_t de telle sorte qu'on "opère" avec un rapport bruit sur signal (σ_b/σ_y) donné.

I-1 Influence de l'entrée u_t

Les essais que nous présentons ont porté sur l'identification d'un système dont le paramètre b de la transmittance a été choisi de façon que sa séquence de pondération puisse être représentée par un nombre relativement limité de points (< 30) ; la valeur du paramètre " a " a été prise égale à $(1-b)^2$ de façon à assurer un gain statique unité au processus.

Nous avons retenu les valeurs suivantes :

$$a = 0,09$$

$$b = 0,7$$

conduisant à la transmittance :

$$H(z) = \frac{0,09 z^{-1}}{1 - 1,4 z^{-1} + 0,49 z^{-2}}$$

et qui permettent d'adopter une mémoire finie, caractérisée par $m = 25$.

L'identification a été effectuée en présence d'une perturbation b_t indépendante ($k_2 = 0$) dont la valeur de l'écart type assure un niveau de bruit de 1 %.

Deux types d'entrée ont été utilisés :

essai 1 : u_t séquence indépendante, $k_1 = 0$

essai 2 : u_t séquence fortement corrélée, $k_1 = 0,98$

Pour mettre en évidence la sensibilité de la déconvolution par rapport à la nature de l'entrée (ou encore au conditionnement de la matrice U), on a opéré en ne faisant appel à aucunes connaissances a priori ; l'algorithme se comporte alors rigoureusement comme la méthode des moindres carrés.

Les résultats que nous présentons à la figure 3 ont été obtenus avec un échantillon de 40 données ($N = 40$) pour chacun des essais 1 et 2.

Dans les deux cas, l'algorithme a été initialisé par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 10^5 ; \theta = 0$$

D'une part, nous constatons l'aspect caractéristique des irrégularités des courbes qui, d'amplitude négligeable pour l'essai 1, dénature en grande partie l'identification dans le second cas, malgré un niveau de bruit sur la sortie relativement faible (1 %). D'autre part, nous vérifions qu'une entrée très corrélée, apportant beaucoup moins d'information qu'une séquence indépendante, conduit à une grande imprécision dans les résultats, imprécision que nous avons définie en représentant la frontière de l'intervalle de confiance à 95 % ; ceci n'a pu être réalisé pour l'essai 1 en raison de la petitesse des écarts types des estimations. A cet effet, nous résumons au tableau suivant les résultats de ces deux tests comparés à la séquence de pondération exacte du système.

SIMULATION

Nombre de données $N = 40$
 Perturbations indépendantes, niveau 1 %

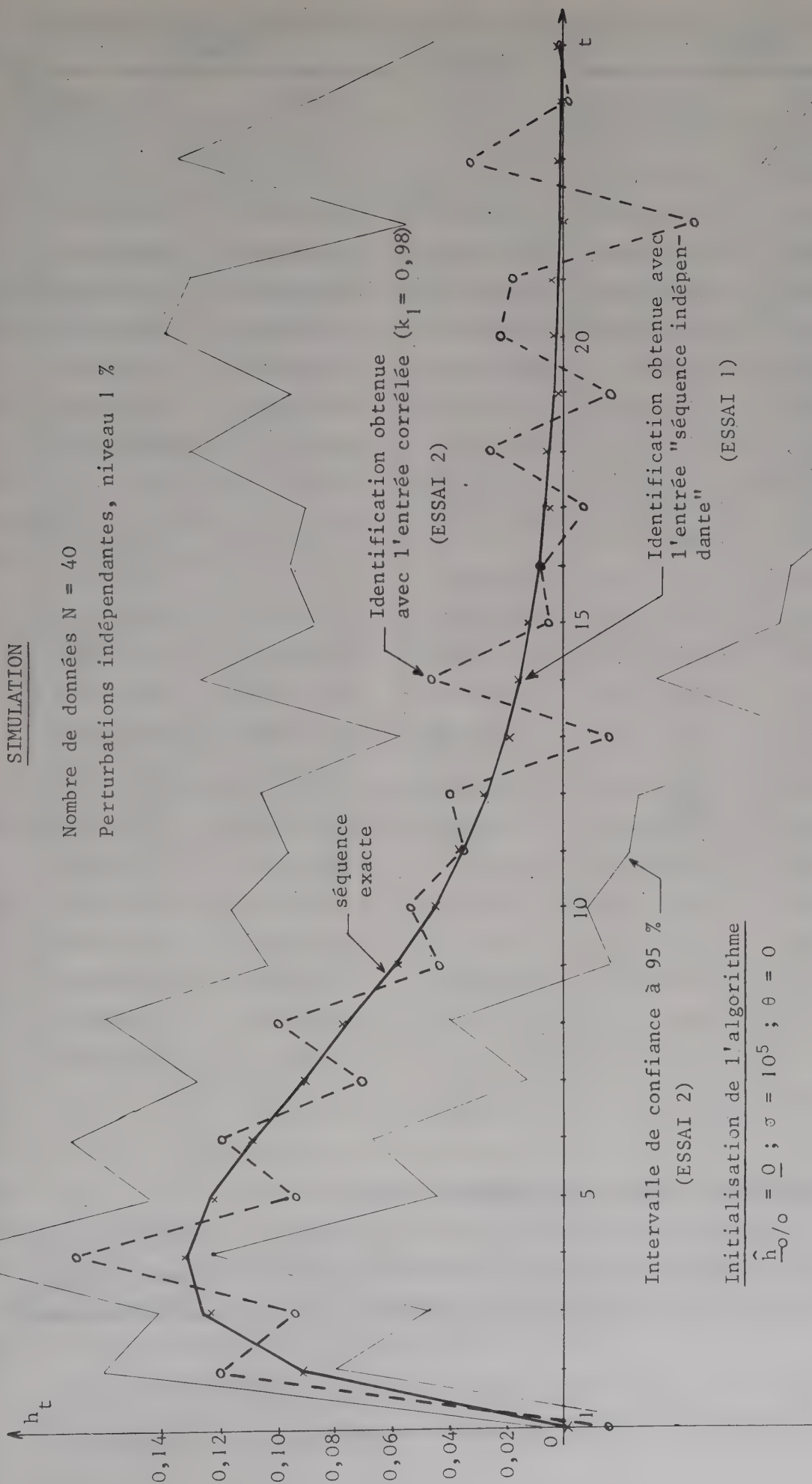


Fig. 3

Essai 1		Résultat exact	Essai 2	
Ecart type	Estimation		Estimation	Ecart type
0,7660 E-03	- 0,1011 E-02	0,0000 E+00	- 0,1596 E-01	0,1207 E-01
0,8298 E-03	0,9096 E-01	0,9000 E-01	0,1192 E+00	0,2081 E-01
0,9196 E-03	0,1248 E+00	0,1260 E+00	0,9451 E-01	0,2359 E-01
0,9269 E-03	0,1337 E+00	0,1323 E+00	0,1694 E+00	0,2482 E-01
0,9283 E-03	0,1228 E+00	0,1234 E+00	0,9441 E-01	0,2516 E-01
0,1007 E-02	0,1083 E+00	0,1080 E+00	0,1208 E+00	0,2663 E-01
0,1063 E-02	0,8980 E-01	0,9075 E-01	0,7140 E-01	0,2918 E-01
0,1089 E-02	0,7469 E-01	0,7412 E-01	0,9995 E-01	0,3021 E-01
0,1128 E-02	0,5913 E-01	0,5929 E-01	0,4387 E-01	0,3033 E-01
0,1104 E-02	0,4665 E-01	0,4669 E-01	0,5367 E-01	0,3094 E-01
0,1110 E-02	0,3645 E-01	0,3631 E-01	0,3617 E-01	0,3071 E-01
0,1248 E-02	0,2866 E-01	0,2796 E-01	0,4081 E-01	0,3308 E-01
0,1378 E-02	0,1979 E-01	0,2135 E-01	- 0,1614 E-01	0,3797 E-01
0,1462 E-02	0,1641 E-01	0,1619 E-01	0,4765 E-01	0,4055 E-01
0,1450 E-02	0,1246 E-01	0,1221 E-01	0,5866 E-02	0,4141 E-01
0,1609 E-02	0,9067 E-02	0,9156 E-02	0,8570 E-02	0,4473 E-01
0,1701 E-02	0,5890 E-02	0,6836 E-02	- 0,8765 E-02	0,4928 E-01
0,1814 E-02	0,5358 E-02	0,5084 E-02	0,2663 E-01	0,5215 E-01
0,1974 E-02	0,3111 E-02	0,3768 E-02	- 0,1719 E-01	0,5643 E-01
0,2014 E-02	0,3036 E-02	0,2784 E-02	0,2243 E-01	0,5859 E-01
0,2033 E-02	0,3868 E-02	0,2051 E-02	0,1797 E-01	0,5638 E-01
0,1904 E-02	- 0,6718 E-03	0,1508 E-02	- 0,4755 E-01	0,5374 E-01
0,1835 E-02	0,1670 E-02	0,1106 E-02	0,3318 E-01	0,5151 E-01
0,1719 E-02	0,4015 E-03	0,8093 E-03	- 0,2540 E-02	0,4330 E-01
0,1407 E-02	0,1412 E-02	0,5911 E-03	0,1846 E-02	0,2119 E-01

Nota : 0,1234 E-01 se lit $0,1234 \times 10^{-1}$

I-2 La prise en compte d'informations a priori

Les résultats issus du second test stigmatisent l'instabilité de la déconvolution. C'est donc, placé dans les mêmes conditions d'identification, que nous allons illustrer le rôle des paramètres σ , θ , α et leur détermination pratique.

Rappelons les caractéristiques de la simulation :

u_t séquence corrélée, $k_1 = 0,98$; b_t bruit indépendant, $k_2 = 0$, niveau 1 %.

Nous supposons, dans un premier temps, que l'on ne dispose d'aucune information quantitative relative à la séquence de pondération même, nous prenons donc :

$$\hat{h}_{0/0} = 0$$

Premier problème : détermination de σ .

De simples considérations physiques suffisent en général pour réduire considérablement l'intervalle de confiance initial, théoriquement infini, en l'absence totale d'informations a priori (méthode des moindres carrés).

Dans le cas présent, il faudrait connaître l'amplitude maximum (en valeur absolue) de la séquence de pondération, pour déterminer avec précision l'écart type σ approprié. Il est rare, bien sûr, d'avoir une telle information, mais il est relativement aisé de connaître un ordre de grandeur du gain statique, qui, pour les systèmes apériodiques ou suffisamment amortis, peut définir une valeur satisfaisante pour σ .

En ce qui concerne la simulation que nous avons adoptée, le système a un gain statique unité ; par excès de prudence, nous prenons volontairement une valeur supérieure, soit $\sigma = 10$.

Deuxième problème : détermination de θ .

Le paramètre θ prend en considération la corrélation existant entre les coefficients h_t , mais se trouve également lié à la "pente type" de $(h - \hat{h}_{0/0})$ par l'intermédiaire de la relation $\frac{\sigma}{\theta}$. L'utilisation de cette expression pour calculer θ , nous l'avons souligné, ch 3 § IV-2-1, nécessite la détermination de l'écart type σ "au plus juste", sans quoi, on risque d'obtenir une valeur de θ n'ayant plus aucune signification vis-à-vis de la corrélation qu'il représente. C'est ce qui arrive en général lorsqu'on initialise par $\hat{h}_{0/0} = 0$, où par prudence on adopte un intervalle de confiance relativement important. En effet, dans notre exemple, la pente maximum de $(h - \hat{h}_{0/0})$ est 0,09, à laquelle on peut associer une pente type $\frac{\sigma}{\theta} = 0,05$; on en déduirait alors pour $\sigma = 10$ une valeur de θ égale à 200, traduisant une corrélation de 0,99 entre h_1 et h_m ($m = 25$), n'ayant aucune signification. C'est pourquoi, dans une telle situation, il convient plutôt de déterminer θ d'après la relation $\rho = \exp - \frac{1}{2} (\frac{i-j}{\theta})^2$, précisant la corrélation des coefficients h_t , sachant qu'a priori h_1 et h_m ont une corrélation négligeable. L'expérience montre que, selon la nature du système, les valeurs de θ comprises entre m et $m/10$ sont satisfaisantes. Nous avons pris ici $\theta = 6$ ($\approx m/4$).

Nous avons ainsi initialisé l'algorithme par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 10 ; \theta = 6$$

Comparons le résultat de cette nouvelle identification, figure 4, avec celui de la figure 3[†].

L'amélioration considérable que l'on constate, caractérise l'efficacité de la méthode, vis-à-vis d'une information a priori ne concernant pas spécifiquement le système identifié ($\hat{h}_{0/0} = 0$) mais des hypothèses générales relatives à la "continuité" des séquences de pondération.

Nous remarquons cependant que le "lissage" des "dents de scie", obtenu grâce à l'introduction du paramètre θ a une influence décroissant rapidement en fin de réponse. Ceci provient du fait que le rapport $\frac{\sigma}{h_t}$ devient démesurément grand quand t est voisin de m .

Le rôle du paramètre α , que nous avons défini pour obtenir un écart type σ variable, est précisément d'uniformiser ce lissage. Nous avons donc effectué une nouvelle identification en prenant $\alpha = \frac{m}{5} = 5$, l'initialisation étant alors :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 10 ; \theta = 6 ; \alpha = 5$$

Cette fois, figure 5, on peut constater que le lissage a été obtenu pour la totalité de la séquence de pondération.

Nous avons représenté, sur cette même figure, la nouvelle estimation qu'on obtient en supposant que h_1 est nul avec certitude. La correction qu'apporte cette hypothèse n'est sensible que pour les 5 premiers "points" de la séquence de pondération, les variances des nouvelles estimations ne diffèrent des anciennes que pour h_1 , h_2 et h_3 .

Remarques -

- L'influence du paramètre α est d'autant plus sensible que l'écart type σ a été choisi exagérément grand. En effet, si l'on accorde une plus grande confiance à l'initialisation $\hat{h}_{0/0}$, il est possible d'obtenir un lissage correcte de la séquence de pondération entière en conservant un écart type constant comme en témoigne la figure 6, illustrant le résultat de l'identification de notre système simulé en initialisant l'algorithme par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 1 ; \theta = 6$$

- D'une façon générale, l'influence des connaissances a priori, sur l'identification, est maximale lorsque le nombre de données (N) est égal au nombre d'inconnues (m), par la suite celle-ci diminue progressivement (éventuellement très lentement, d'où des temps d'identification quelquefois très longs,

[†] Notons que, pour des raisons de mise en page, l'échelle de la figure 3 est la moitié de celle de la figure 4.

SIMULATION

Nombre de données $N = 40$
 Entrée séquence corréllée ($k_1 = 0,98$)
 Perturbations indépendantes, niveau 1 %

Initialisation de l'algorithme

$\hat{h}_{0/0} = \underline{0}$; $\sigma = 10$; $\theta = 6$

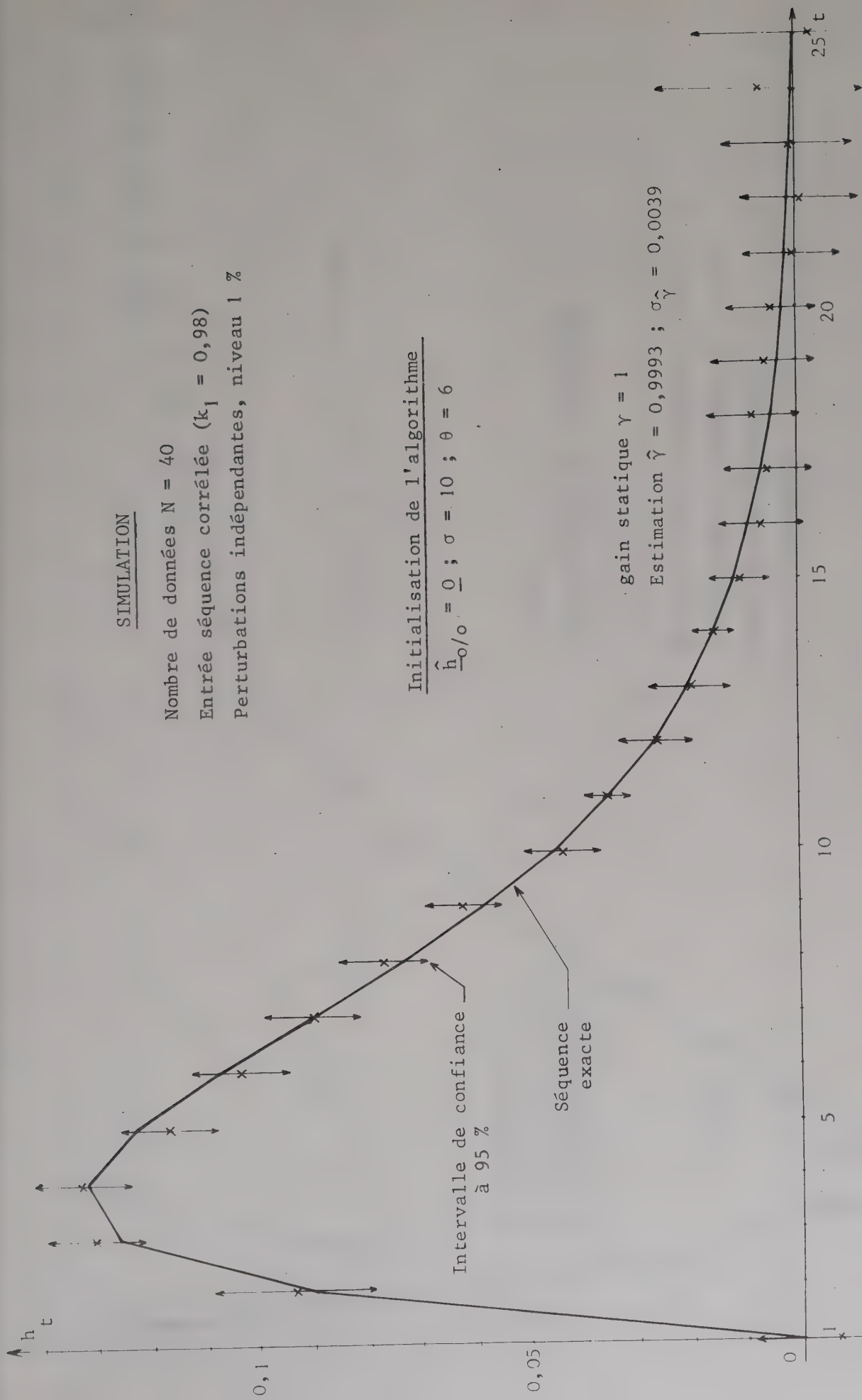


Fig. 4

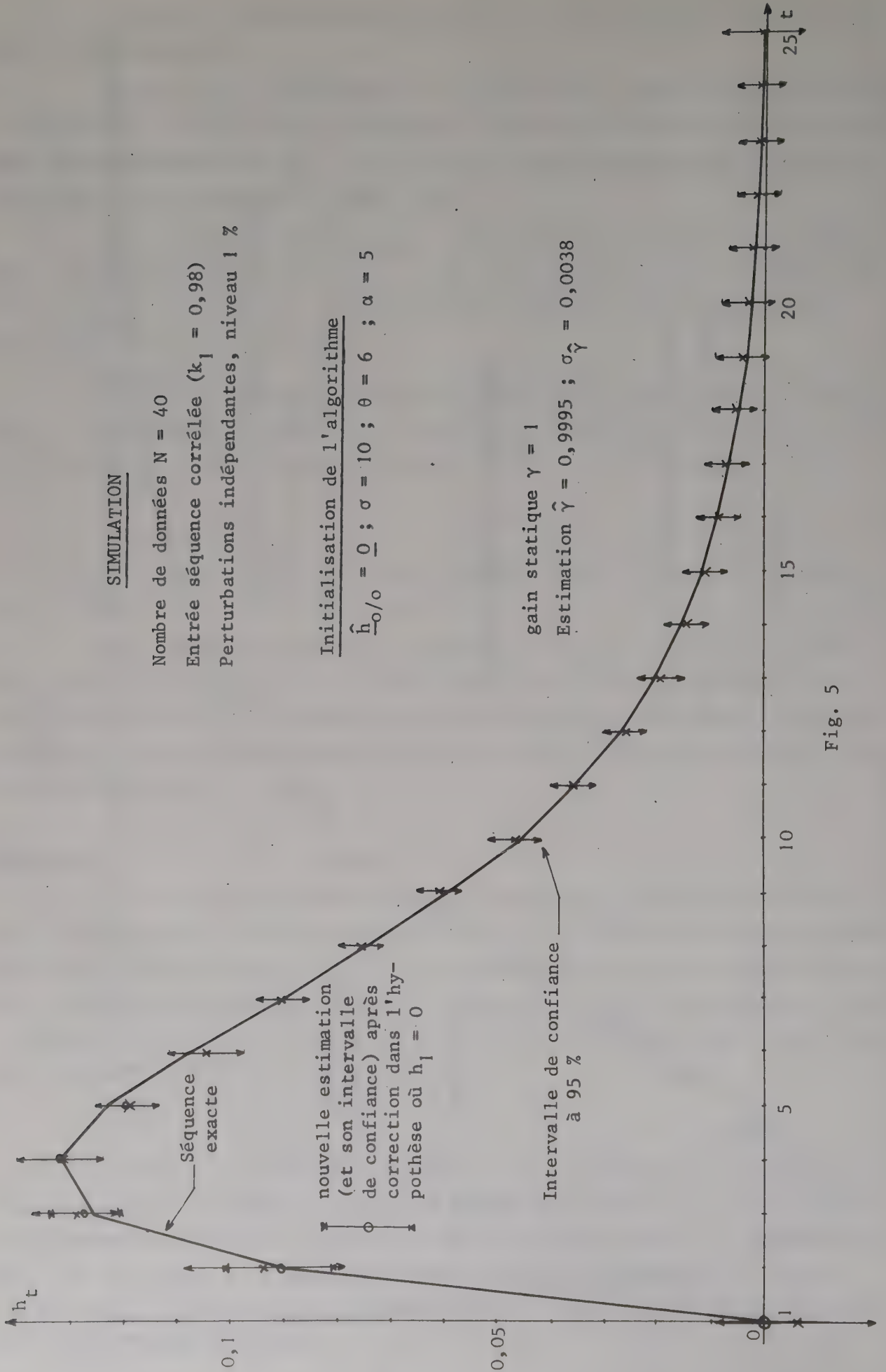


Fig. 5

SIMULATION

Nombre de données $N = 40$
 Entrée séquence corrélée ($k_1 = 0,98$)
 Perturbations indépendantes, niveau 1 %

Initialisation de l'algorithme

$$\hat{h}_{0/0} = \underline{0}; \sigma = 1; \theta = 6$$

gain statique $\gamma = 1$

Estimation $\hat{\gamma} = 0,9991$; $\sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0038$

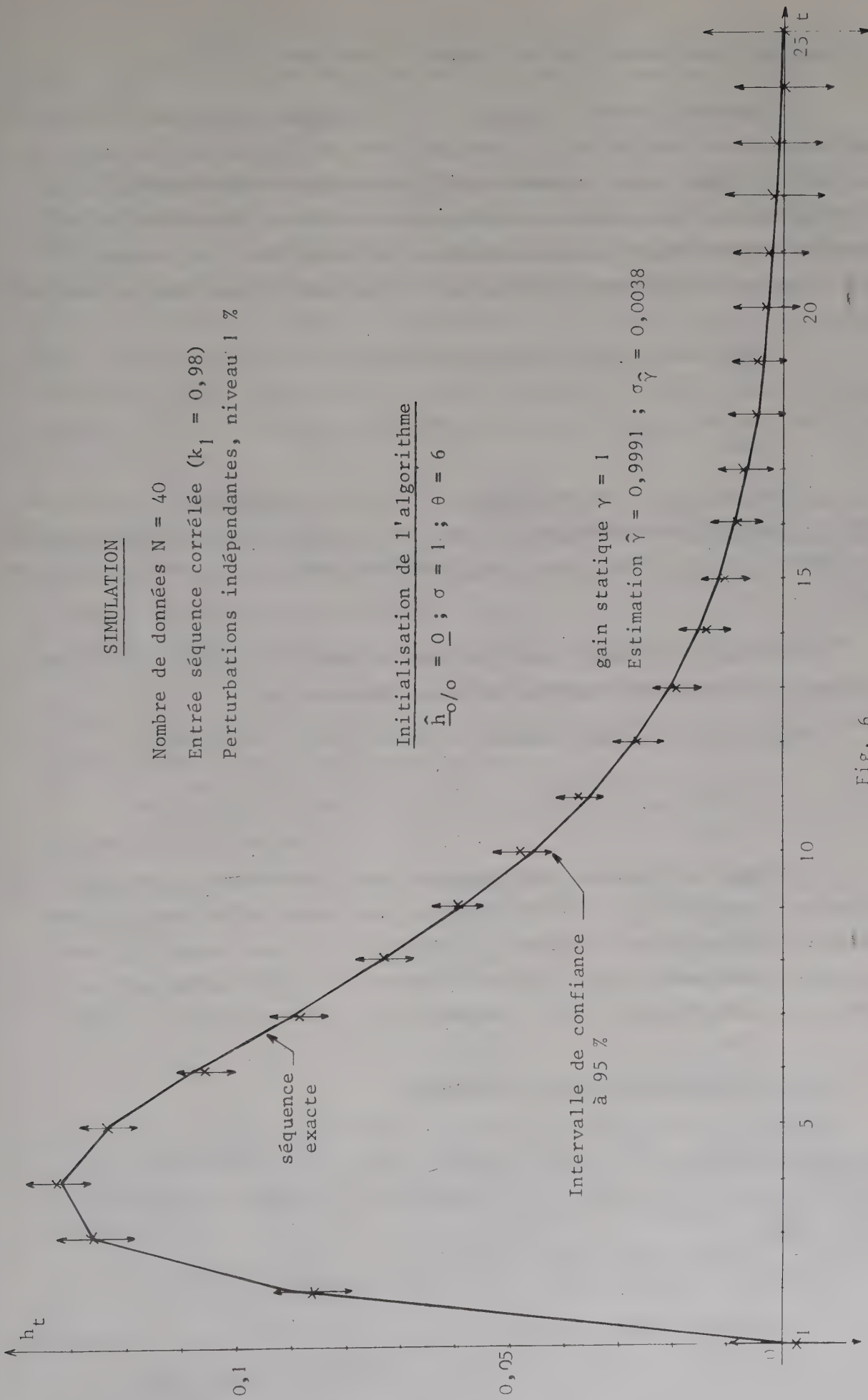


Fig. 6

en leur absence) pour devenir nulle, lorsque N tend vers l'infini.

- On pourrait penser (remarque 1) qu'il suffit de diminuer l'intervalle de confiance initial (défini par σ) pour améliorer le lissage des séquences. En fait, c'est la diminution de la pente type $\frac{\sigma}{\theta}$ qu'il faut rendre responsable de cette amélioration. Il est bien évident que, si θ est nul, la diminution de σ , même dans un rapport élevé, ne peut contribuer en aucun cas à un lissage ($\frac{\sigma}{\theta} = \infty$, $\forall \sigma \neq 0$). Ceci a été facilement vérifié en initialisant l'algorithme successivement par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 \quad ; \quad \sigma = 10^5 \quad ; \quad \theta = 0$$

puis par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 \quad ; \quad \sigma = 1 \quad ; \quad \theta = 0$$

D'une part, on a constaté pour $N = m = 25$, un même aspect "en dent de scie" de la séquence de pondération, il est vrai, d'amplitude un peu moins grande dans le second cas, et, d'autre part, des résultats identiques pour $N = 40$ (cf remarque 2).

- Le résultat d'expériences antérieures peut être pris en compte par $\hat{h}_{0/0}$, la confiance qu'on lui accorderait étant précisée par σ .

Nous avons pris, comme exemple, l'initialisation suivante :

$$\hat{h}_{t \ 0/0} = 0,1 \times (t-1) \times e^{-\frac{t-1}{3}} \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, m$$

$$\sigma = 0,06 \quad ; \quad \theta = 6 \quad ; \quad \alpha = 10$$

Ce type d'information supplémentaire contribue essentiellement à l'amélioration de la précision de l'identification. Nous avons effectivement obtenu des résultats très voisins de ceux de la figure 5, en ce qui concerne $\hat{h}$, les écarts types correspondant ayant diminué d'environ 30 %. Soulignons qu'ici, le choix de θ et α se réfère à l'écart présumé $\underline{h} - \underline{h}_{0/0}$ et non plus $\underline{h} - \underline{0} = \underline{h}$.

I-3 Les perturbations et leur estimation

Nous avons, cette fois, ajouté à la sortie du système une perturbation colorée, caractérisée par $k_2 = 0,95$, l'écart type σ_2 ayant été déterminé de façon à assurer un niveau de bruit de 10 % (l'entrée étant toujours la séquence corrélée, $k_1 = 0,98$).

Nous avons opéré sur un échantillon de 100 données ($N = 100$).

L'algorithme a été initialisé par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 \quad ; \quad \sigma = 1 \quad ; \quad \theta = 6 \quad ; \quad \alpha = 6$$

en ce qui concerne l'estimation de la séquence de pondération, et par :

$$E(b_t^2) = 0,02 \quad ; \quad k_2 = 0$$

pour l'identification des perturbations, les valeurs exactes étant :

$$E(b_t^2) = 0,01 \quad ; \quad k_2 = 0,95$$

Là encore, nous n'avons voulu introduire dans l'initialisation de l'algorithme que des informations générales relatives à la corrélation des coefficients h_t . Il est donc prévisible, compte tenu, d'une part, du niveau de bruit (10 %) et de sa corrélation ($k_2 = 0,95$) et, d'autre part, du nombre de données qu'on s'est imposé ($N = 100$), qu'on obtiendra une identification peu précise (écart type de $\hat{h}$ important) mais, néanmoins, une courbe infiniment plus "utilisable" sinon significative, que la suite de points erratiques qu'on obtiendrait inmanquablement par la méthode des moindres carrés dans de telles conditions d'identification.

A la première itération, l'estimation de la séquence de pondération est donc effectuée en supposant les perturbations indépendantes. Nous trouvons à la figure 7 les résultats de cette première identification. Nous constatons, à la fois, l'imprécision des estimations (due au niveau de bruit) et le lissage qu'opèrent néanmoins les informations a priori que nous avons introduites.

En raison de l'estimation particulièrement mauvaise de h_1 , on a pu illustrer clairement les modifications qui s'opèrent sur le reste de la séquence lorsqu'on suppose avec certitude que h_1 est nul.

En ce qui concerne l'identification des perturbations, nous avons obtenu les résultats suivants :

initialisation	$c = 0,00000$	$\sigma_b = 0,10000$
itération 1	$c = 0,93364$	$\sigma_b = 0,07725$
" 2	$c = 0,95752$	$\sigma_b = 0,08523$
" 3	$c = 0,96017$	$\sigma_b = 0,08715$
" 4	$c = 0,96048$	$\sigma_b = 0,08741$
" 5	$c = 0,96052$	$\sigma_b = 0,08745$

On constate, d'une part, qu'on peut s'en tenir aux résultats de la *seconde itération*, figure 8, et, d'autre part, qu'on converge vers une estimation "biaisée" des paramètres c et σ_b , ce qui était prévisible (dans l'hypothèse où l'identification globale, système + perturbation, ainsi obtenue, convergerait).

Remarque -

Etant donné l'importance des écarts types, nous avons délimité aux

SIMULATION
IDENTIFICATION DES PERTURBATIONS

(1ère itération)

Nombre de données : $N = 100$
Entrée séquence corrélée ($k_1 = 0,98$)
Perturbation corrélée ($k_2 = 0,95$), niveau 10 %

Initialisation de l'algorithme

$\hat{h}_{0/0} = \underline{0}$; $\sigma = 1$; $\theta = 6$; $\alpha = 6$

séquence exacte

gain statique du système : $\gamma = 1$

$\hat{\gamma} = 0,9002$; $\sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0368$

$\hat{\gamma} = 0,8965$; $\sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0368$

(après correction de $\hat{h}_1$)

Intervalle de confiance
à 70 %

Nouvelle estimation
et son intervalle de
confiance à 70 % après
correction de $\hat{h}_1$

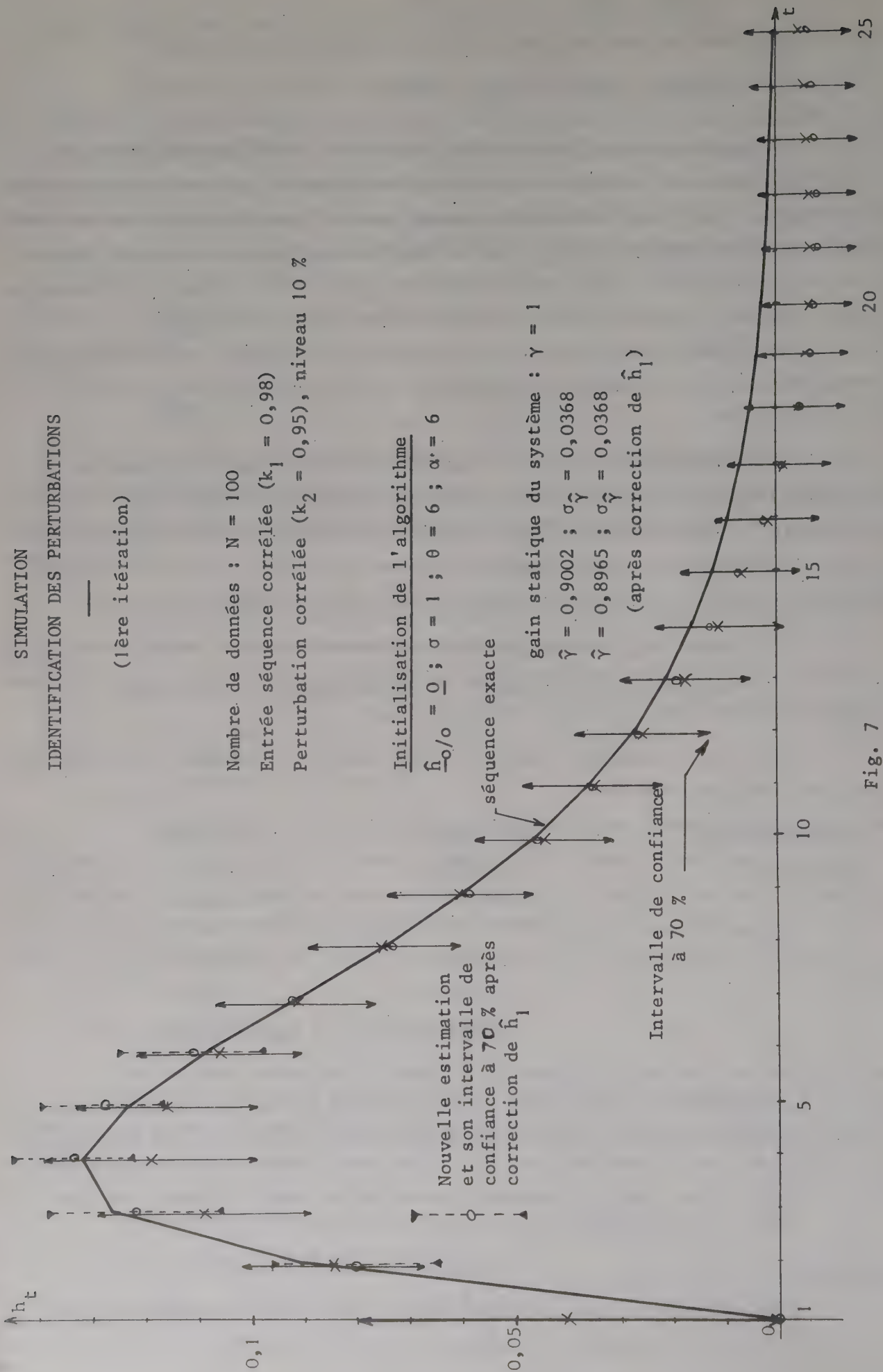


Fig. 7

(2ème itération)

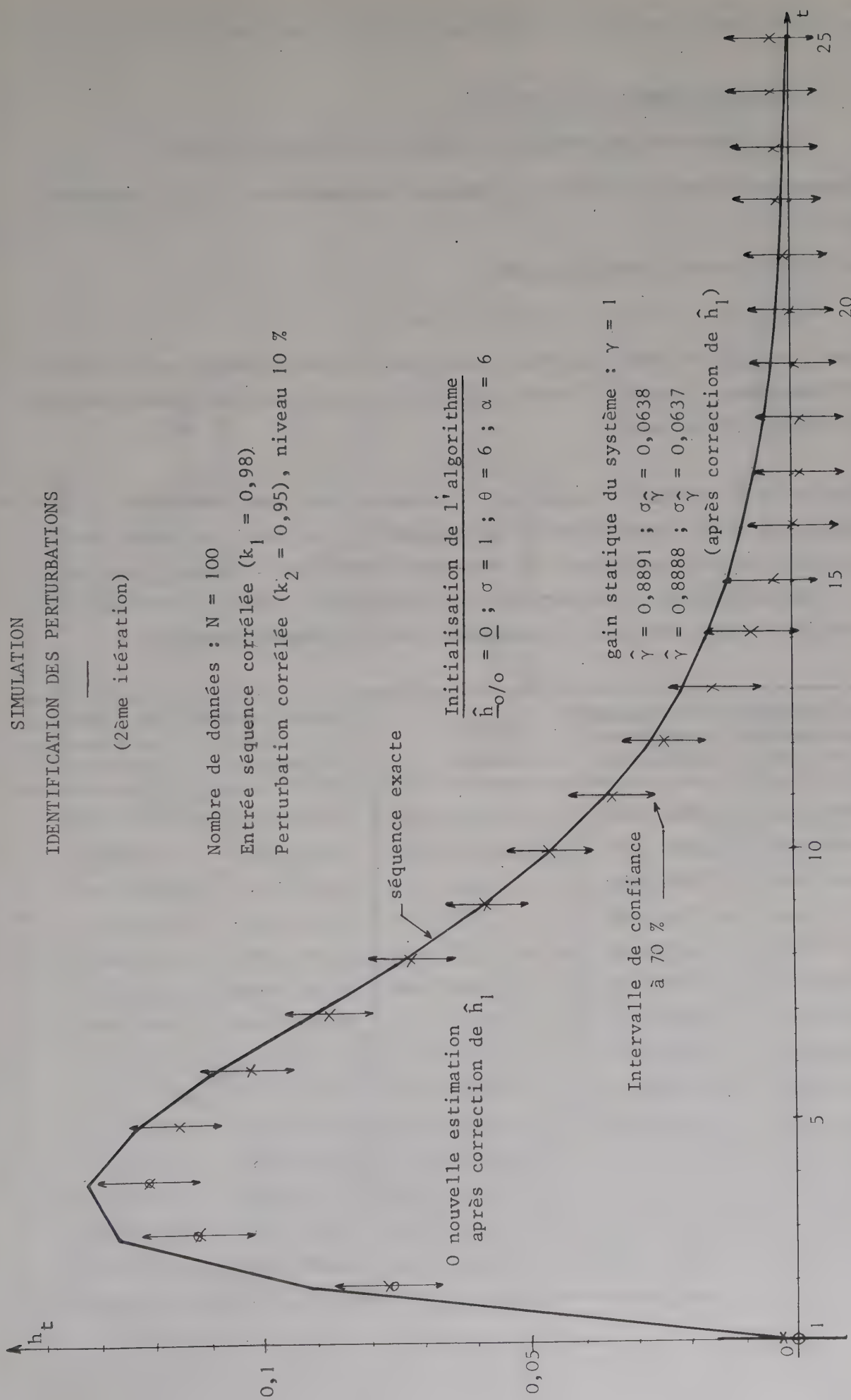
Nombre de données : $N = 100$ Entrée séquence corrélée ($k_1 = 0,98$)Perturbation corrélée ($k_2 = 0,95$), niveau 10 %

Fig. 8

figures 7 et 8 un intervalle de confiance à 70 % ($\pm \sigma$) au lieu de 95 %, ($\pm 2 \sigma$).

I-4 Echantillonnage à pas variable

Nous reprenons maintenant la simulation caractérisée par :

u_t séquence corrélée, $k_1 = 0,98$; b_t séquence indépendante, $k_2 = 0$, niveau de bruit 1 %.

et nous initialisons l'algorithme par :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \quad \sigma = 10 ; \quad \theta = 6 ; \quad \alpha = 5$$

de façon à se trouver dans les mêmes conditions d'identification que celles du § I-2 (2ème essai, figure 5). Toute fois, nous opérons avec un échantillonnage à pas variable défini par :

$$v = 9 ; \quad \mu = 5$$

réduisant à 14 le nombre de paramètres à estimer. Nous avons représenté, figure 9, le résultat de cette identification en supposant h_1 nul avec certitude. Nous avons reporté au tableau suivant les résultats numériques obtenus, d'une part, avec un échantillonnage à pas variable et, d'autre part, ceux correspondant à un échantillonnage à pas constant, comparés avec la séquence exacte.

Echantillonnage à pas constant		Résultat exact	Echantillonnage à pas variable	
Ecart type	Estimation		Estimation	Ecart type
0,0000 E+00	0,0000 E+00	$h_1 = 0,0000 \text{ E}+00$	0,0000 E+00	0,0000 E+00
0,5348 E-02	0,9063 E-01	$h_2 = 0,9000 \text{ E}-01$	0,9037 E-01	0,5549 E-02
0,3345 E-02	0,1281 E+00	$h_3 = 0,1260 \text{ E}+00$	0,1282 E+00	0,3369 E-02
0,4270 E-02	0,1322 E+00	$h_4 = 0,1323 \text{ E}+00$	0,1324 E+00	0,4527 E-02
0,3119 E-02	0,1203 E+00	$h_5 = 0,1234 \text{ E}+00$	0,1203 E+00	0,3096 E-02
0,3606 E-02	0,1052 E+00	$h_6 = 0,1080 \text{ E}+00$	0,1051 E+00	0,3484 E-02
0,2463 E-02	0,9015 E-01	$h_7 = 0,9075 \text{ E}-01$	0,9024 E-01	0,2526 E-02
0,2245 E-02	0,7600 E-01	$h_8 = 0,7412 \text{ E}-01$	0,7618 E-01	0,2260 E-02
0,2154 E-02	0,6160 E-01	$h_9 = 0,5929 \text{ E}-01$	0,6178 E-01	0,2463 E-02
0,2468 E-02	0,4762 E-01	$h_{10} = 0,4669 \text{ E}-01$	0,4743 E-01	0,2586 E-02
0,2035 E-02	0,2690 E-01	$h_{12} = 0,2797 \text{ E}-01$	0,2553 E-01	0,2824 E-02
0,2143 E-02	0,1188 E-01	$h_{15} = 0,1221 \text{ E}-01$	0,1124 E-01	0,2739 E-02
0,2295 E-02	0,4016 E-02	$h_{19} = 0,3768 \text{ E}-02$	0,3591 E-02	0,2940 E-02
0,2375 E-02	0,1236 E-02	$h_{24} = 0,8093 \text{ E}-03$	0,1303 E-02	0,3305 E-02

SIMULATION

ECHANTILLONNAGE A PAS VARIABLE

Nombre de données : $N = 40$

Entrée séquence corrélée ($k_1 = 0,98$)

Perturbations indépendantes, niveau 1 %

Initialisation de l'algorithme

$\hat{h}_{0/0} = 0$; $\sigma = 10$; $\theta = 6$; $\alpha = 5$
 $\nu = 9$; $\mu = 5$

gain statique du système : $\gamma = 1$
 $\hat{\gamma} = 0,9991$; $\sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0057$

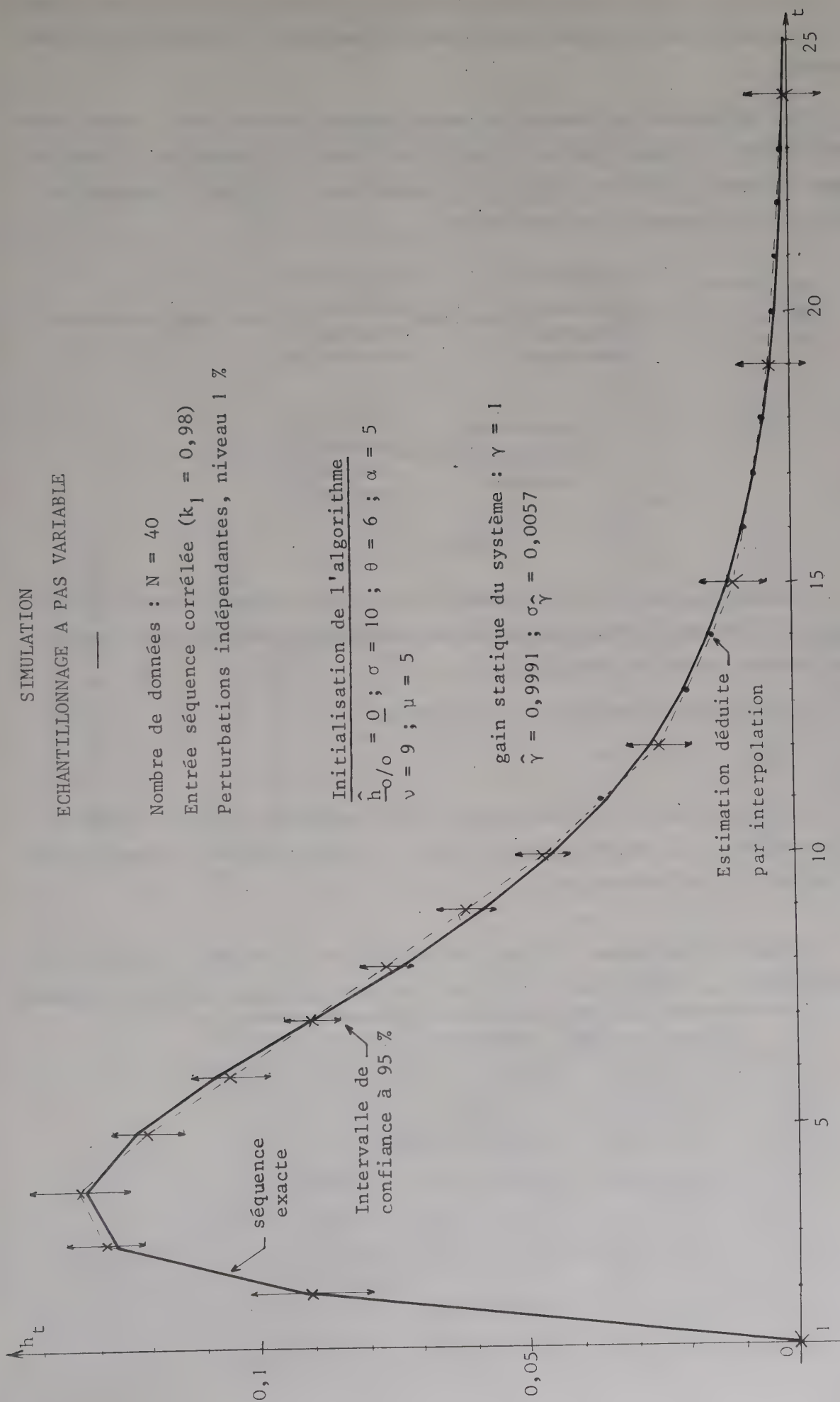


Fig. 9

On constate une identité absolue entre les deux identifications (compte tenu de l'intervalle de confiance associé aux estimations) et justifie pleinement cette méthode.

Nous présentons maintenant un second exemple portant sur l'identification d'un système du premier ordre, défini à la figure 10, permettant de mettre en évidence le parti qu'on peut tirer de l'adaptation de l'échantillonnage en fonction du type de séquence de pondération.

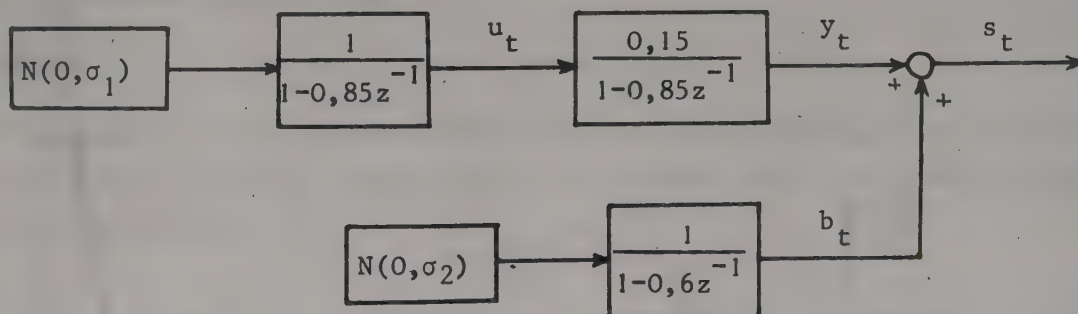


Fig. 10

L'identification a été effectuée à partir d'un échantillon de 40 données (u_t, s_t) , la sortie y_t étant perturbée par un bruit b_t de caractéristiques supposées connues, ayant un niveau de 1 %.

L'initialisation adoptée est la suivante :

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \quad \sigma = 1 ; \quad \theta = 7 ;$$

On a admis que le système pouvait être représenté par les 30 premiers points de sa séquence de pondération ($m = 30$), la répartition de l'échantillonnage à pas variable a été définie par :

$$v = 2 ; \quad \mu = 7$$

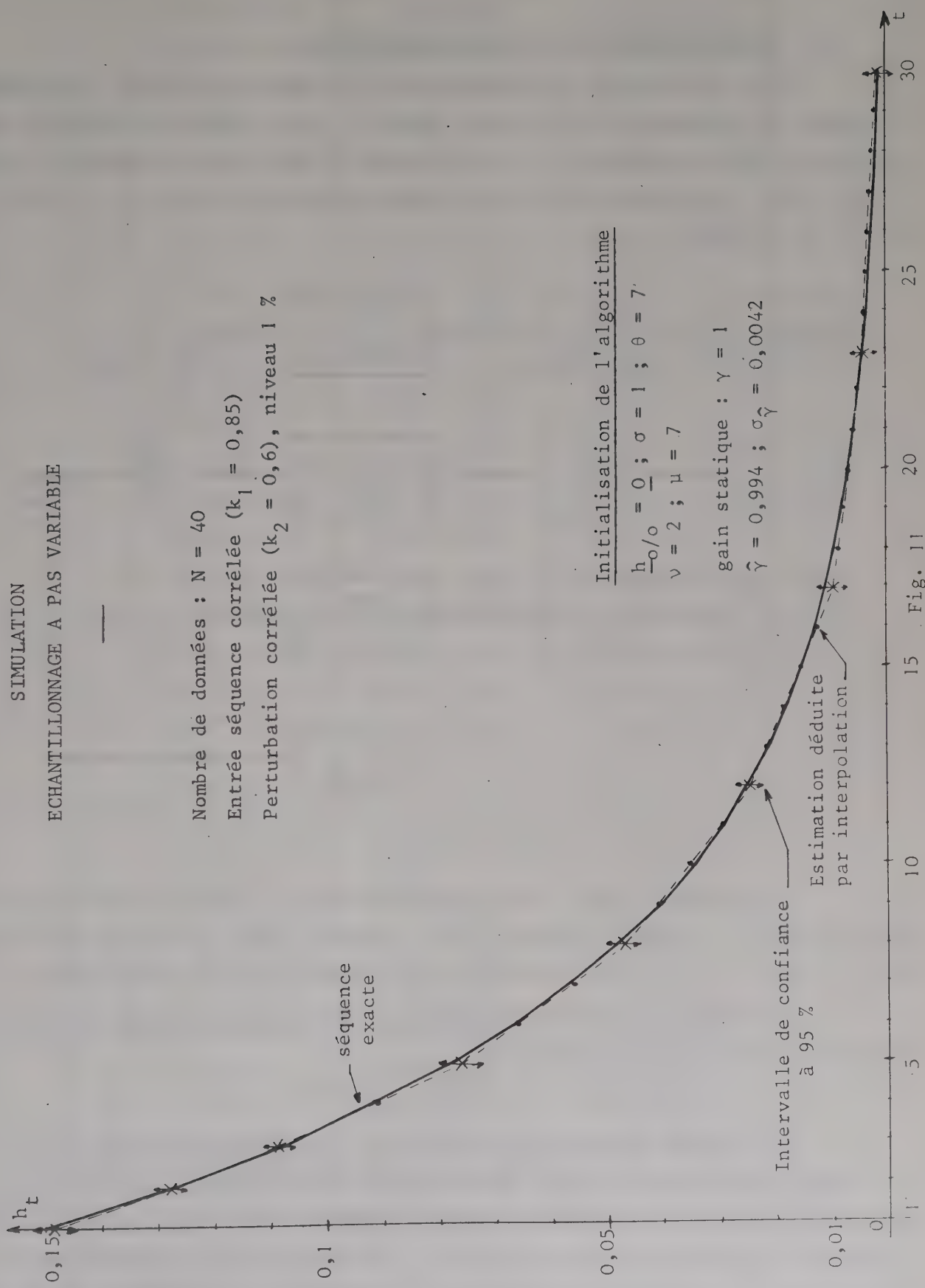
réduisant le nombre d'inconnues à 9 (au lieu de 30), soit un temps de calcul diminué environ dans un rapport de 1 à 10. Les résultats obtenus, tableau ci-dessous,

Séquence exacte	Estimation	Ecart type
$h_1 = 0,1500 \text{ E}+00$	$0,1485 \text{ E}+00$	$0,1748 \text{ E}-02$
$h_2 = 0,1275 \text{ E}+00$	$0,1278 \text{ E}+00$	$0,1127 \text{ E}-02$
$h_3 = 0,1084 \text{ E}+00$	$0,1085 \text{ E}+00$	$0,1107 \text{ E}-02$
$h_5 = 0,7830 \text{ E}-01$	$0,7675 \text{ E}-01$	$0,1075 \text{ E}-02$
$h_8 = 0,4808 \text{ E}-01$	$0,4705 \text{ E}-01$	$0,1045 \text{ E}-02$
$h_{12} = 0,2510 \text{ E}-01$	$0,2462 \text{ E}-01$	$0,9300 \text{ E}-03$
$h_{17} = 0,1114 \text{ E}-01$	$0,9501 \text{ E}-02$	$0,1011 \text{ E}-02$
$h_{23} = 0,4201 \text{ E}-02$	$0,4306 \text{ E}-02$	$0,1032 \text{ E}-02$
$h_{30} = 0,1346 \text{ E}-02$	$0,1800 \text{ E}-02$	$0,1280 \text{ E}-02$

SIMULATION

ECHANTILLONNAGE A PAS VARIABLE

Nombre de données : $N = 40$
 Entrée séquence corrélée ($k_1 = 0,85$)
 Perturbation corrélée ($k_2 = 0,6$), niveau 1 %



Initialisation de l'algorithme

$$\frac{h_0}{\sigma} = 0 ; \sigma = 1 ; \theta = 7' \\ \nu = 2 ; \mu = 7$$

gain statique : $\gamma = 1$

$$\hat{\gamma} = 0,994 ; \sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0042$$

Fig. 11

et figure 11, permettent d'observer, là encore, l'excellent comportement de la méthode.

I-5 Identification d'un système multivariable

Nous avons simulé un système ayant 3 entrées et 1 sortie, conformément au schéma de la figure 12. Les écarts types σ_1 , σ_2 et σ_3 ont été déterminés de telle sorte que les sorties y_t^1 , y_t^2 et y_t^3 aient un même ordre de grandeur ; enfin, l'écart type σ_4 de la perturbation b_t assure un niveau de bruit de 1 % sur la sortie du système, s_t .

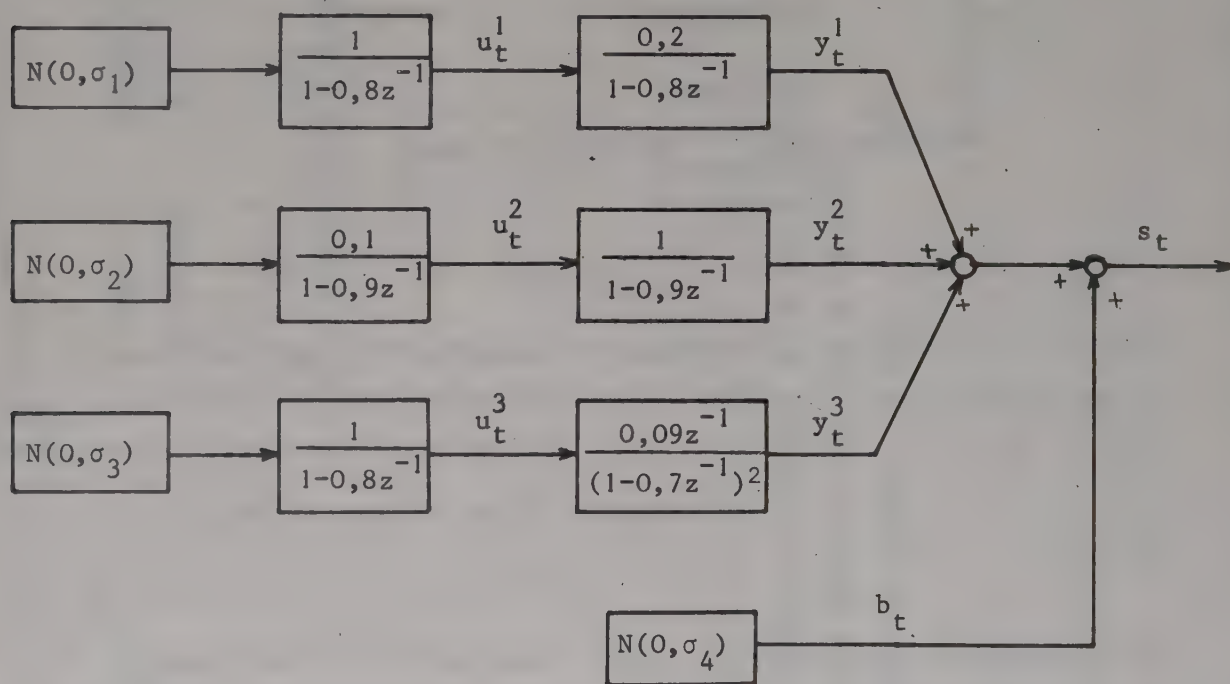


Fig. 12

La première "chaîne" est caractérisée par un "premier ordre" de gain statique unité, la seconde également par un premier ordre, mais cette fois de gain statique 10, et enfin la dernière par un second ordre de gain statique 1.

Nous supposons définies les mémoires (approchées) de chaque chaîne qui, dans ce cas, ont été prises égales à :

$$m_1 = 20 \quad ; \quad m_2 = 40 \quad ; \quad m_3 = 24$$

Il convient de remarquer, dans le cas des systèmes multivariables, qu'il faut additionner les temps de réponse de chaque chaîne, pour définir une longueur d'échantillon assurant un nombre de données égal aux nombres de coefficients de pondération à estimer (ici 84). Les résultats de l'identification que nous présentons au tableau ci-contre ont été obtenus avec un échantillon de 100 données ($N = 100$).

Séquence exacte	Estimation	Ecart type
$h_1^1 = 0,2000 \text{ E}+00$	0,2024 E+00	0,3742 E-02
$h_2^1 = 0,1600 \text{ E}+00$	0,1604 E+00	0,2265 E-02
$h_3^1 = 0,1280 \text{ E}+00$	0,1279 E+00	0,2135 E-02
$h_4^1 = 0,1024 \text{ E}+00$	0,1024 E+00	0,1759 E-02
$h_5^1 = 0,8192 \text{ E}-01$	0,8180 E-01	0,1643 E-02
$h_6^1 = 0,6553 \text{ E}-01$	0,6518 E-01	0,1604 E-02
$h_8^1 = 0,4194 \text{ E}-01$	0,4133 E-01	0,1603 E-02
$h_{11}^1 = 0,2147 \text{ E}-01$	0,2127 E-01	0,1478 E-02
$h_{15}^1 = 0,8796 \text{ E}-02$	0,7740 E-02	0,1492 E-02
$h_{20}^1 = 0,2882 \text{ E}-02$	0,1959 E-02	0,2095 E-02
$h_1^2 = 0,1000 \text{ E}+01$	0,9923 E+00	0,3530 E-01
$h_2^2 = 0,9000 \text{ E}+00$	0,9054 E+00	0,1645 E-01
$h_3^2 = 0,8100 \text{ E}+00$	0,8222 E+00	0,1759 E-01
$h_4^2 = 0,7290 \text{ E}+00$	0,7434 E+00	0,1689 E-01
$h_5^2 = 0,6561 \text{ E}+00$	0,6694 E+00	0,1478 E-01
$h_7^2 = 0,5314 \text{ E}+00$	0,5392 E+00	0,1348 E-01
$h_{10}^2 = 0,3874 \text{ E}+00$	0,3871 E+00	0,1184 E-01
$h_{14}^2 = 0,2541 \text{ E}+00$	0,2521 E+00	0,1047 E-01
$h_{19}^2 = 0,1501 \text{ E}+00$	0,1504 E+00	0,9177 E-02
$h_{25}^2 = 0,7976 \text{ E}-01$	0,7392 E-01	0,8413 E-02
$h_{32}^2 = 0,2417 \text{ E}-01$	0,2454 E-01	0,6985 E-02
$h_{40}^2 = 0,1676 \text{ E}-01$	0,5003 E-02	0,8039 E-02
$h_1^3 = 0,0000 \text{ E}+00$	0,0000 E+00	0,0000 E+00
$h_2^3 = 0,9000 \text{ E}-01$	0,8523 E-01	0,2648 E-02
$h_3^3 = 0,1260 \text{ E}+00$	0,1238 E+00	0,1790 E-02
$h_4^3 = 0,1323 \text{ E}+00$	0,1325 E+00	0,1789 E-02
$h_5^3 = 0,1234 \text{ E}+00$	0,1245 E+00	0,1875 E-02
$h_6^3 = 0,1080 \text{ E}+00$	0,1089 E+00	0,1786 E-02
$h_7^3 = 0,9076 \text{ E}-01$	0,9132 E-01	0,1703 E-02
$h_8^3 = 0,7412 \text{ E}-01$	0,7429 E-01	0,1613 E-02
$h_9^3 = 0,5929 \text{ E}-01$	0,5900 E-01	0,1511 E-02
$h_{10}^3 = 0,4669 \text{ E}-01$	0,4584 E-01	0,1535 E-02
$h_{12}^3 = 0,2796 \text{ E}-01$	0,2638 E-01	0,1534 E-02
$h_{15}^3 = 0,1221 \text{ E}-02$	0,1153 E-01	0,1585 E-02
$h_{19}^3 = 0,3768 \text{ E}-02$	0,3791 E-02	0,1539 E-02
$h_{24}^3 = 0,8093 \text{ E}-03$	-0,8324 E-03	0,1957 E-02

L'algorithme a été initialisé par :

entrée 1 : $\hat{h}_{o/o} = 0$; $\sigma = 1$; $\theta = 7$; $\alpha = 5$
 $v = 5$; $\mu = 5$

entrée 2 : $\hat{h}_{o/o} = 0$; $\sigma = 5$; $\theta = 10$; $\alpha = 7$
 $v = 4$; $\mu = 8$

entrée 3 : $\hat{h}_{o/o} = 0$; $\sigma = 1$; $\theta = 6$; $\alpha = 5$
 $v = 9$; $\mu = 5$

La répartition de l'échantillonnage à pas variable, adoptée, nous a permis de réduire à 36 (au lieu de 84) le nombre de paramètres à estimer.

Notons, encore une fois, la précision de l'identification (nullement affectée par l'échantillonnage à pas variable) obtenue après un "temps d'identification" de l'ordre de grandeur de la somme des temps de réponse de chaque chaîne.

II - IDENTIFICATION DE PROCESSUS REELS -

II-1 Alternateur

Il s'agit ici d'identifier la réponse impulsionnelle d'un système dont l'entrée est la tension rotor d'un alternateur fonctionnant à vide, la sortie étant la tension stator. Les données de ce problème ont été fournies par le Centre de Recherche de l'E.D.F. (Clamart). Nous disposons d'un enregistrement entrée - sortie de 40 points, que nous avons reproduit à la figure 13.

N'ayant que peu d'informations sur le temps de réponse du système, nous avons pris $m = 40$. L'algorithme a été initialisé par :

$\hat{h}_{o/o} = 0$; $\sigma = 0,2$; $\theta = 10$; $\alpha = 10$
 $v = 12$; $\mu = 7$
 $\sigma_b = 0,02$; $c = 0$ (corrélacion nulle)

Après deux itérations, les valeurs des paramètres du modèle des perturbations (σ_b et c) se stabilisent au voisinage de :

$\sigma_b = 0,008$; $c = 0,3$

La séquence de pondération identifiée est représentée à la figure 14.

Enfin, nous avons complété la figure 13 en reportant la sortie "modèle" sur le graphe de la sortie mesurée.

ALTERNATEUR

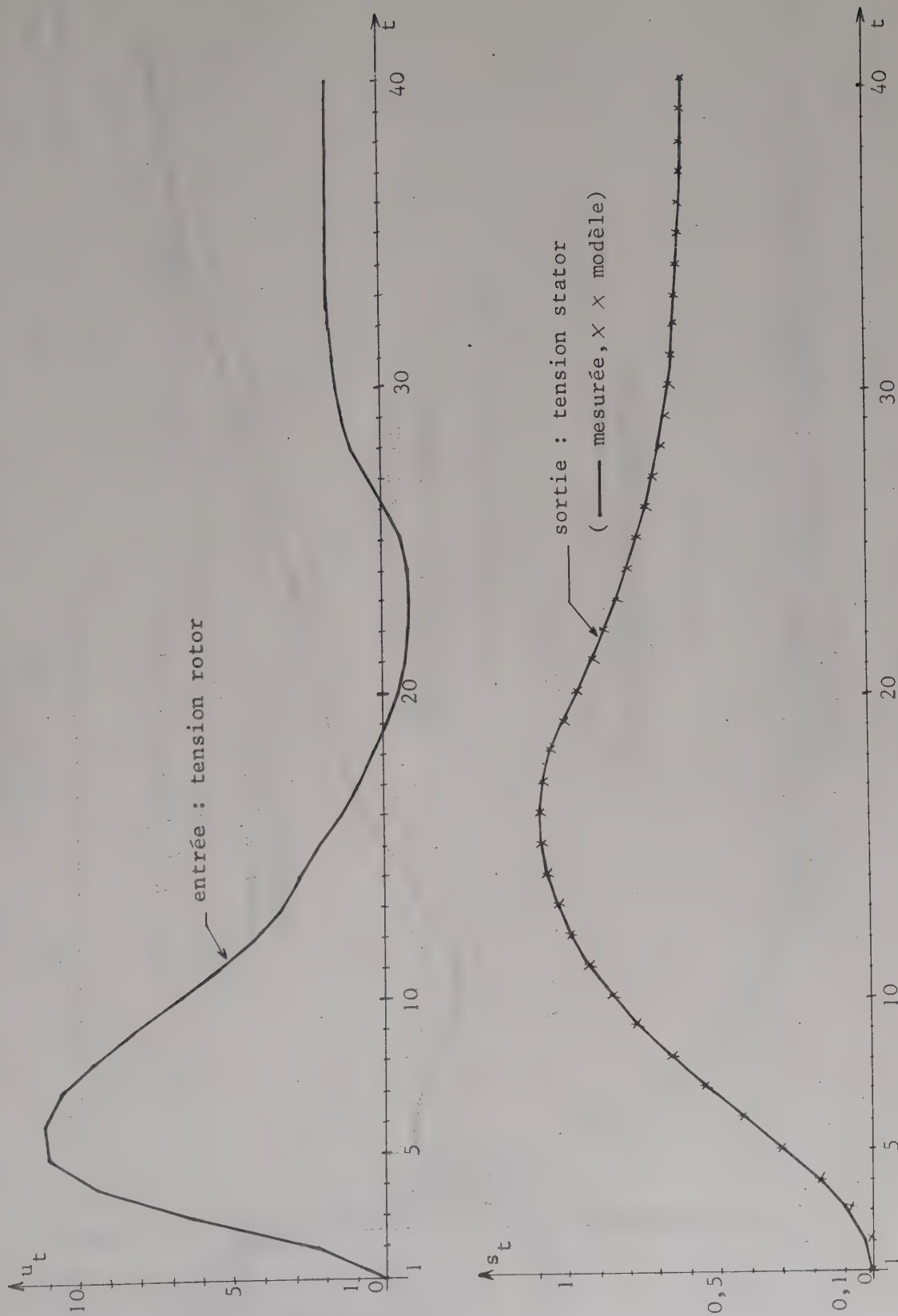


Fig. 13

ALTERNATEUR

entrée u_t : tension rotor
 sortie s_t : tension stator

Nombre de données : $N = 40$

Initialisation de l'algorithme

$\bar{h}_{0/0} = 0$; $\sigma = 0,2$; $\theta = 10$; $\alpha = 10$

$\nu = 12$; $\mu = 7$

gain statique du système :

$\hat{\gamma} = 0,3067$; $\sigma_{\hat{\gamma}} = 0,0024$

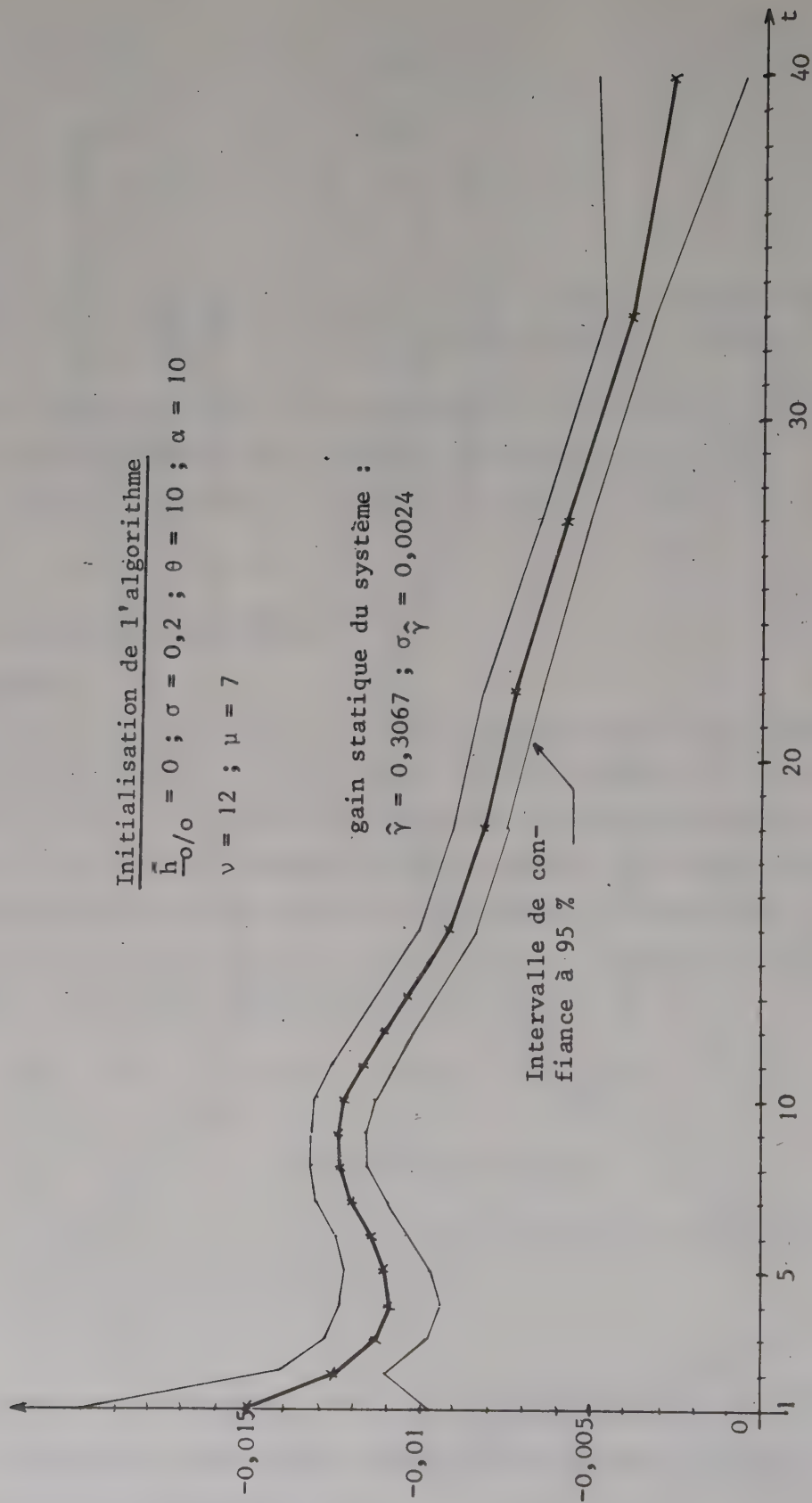
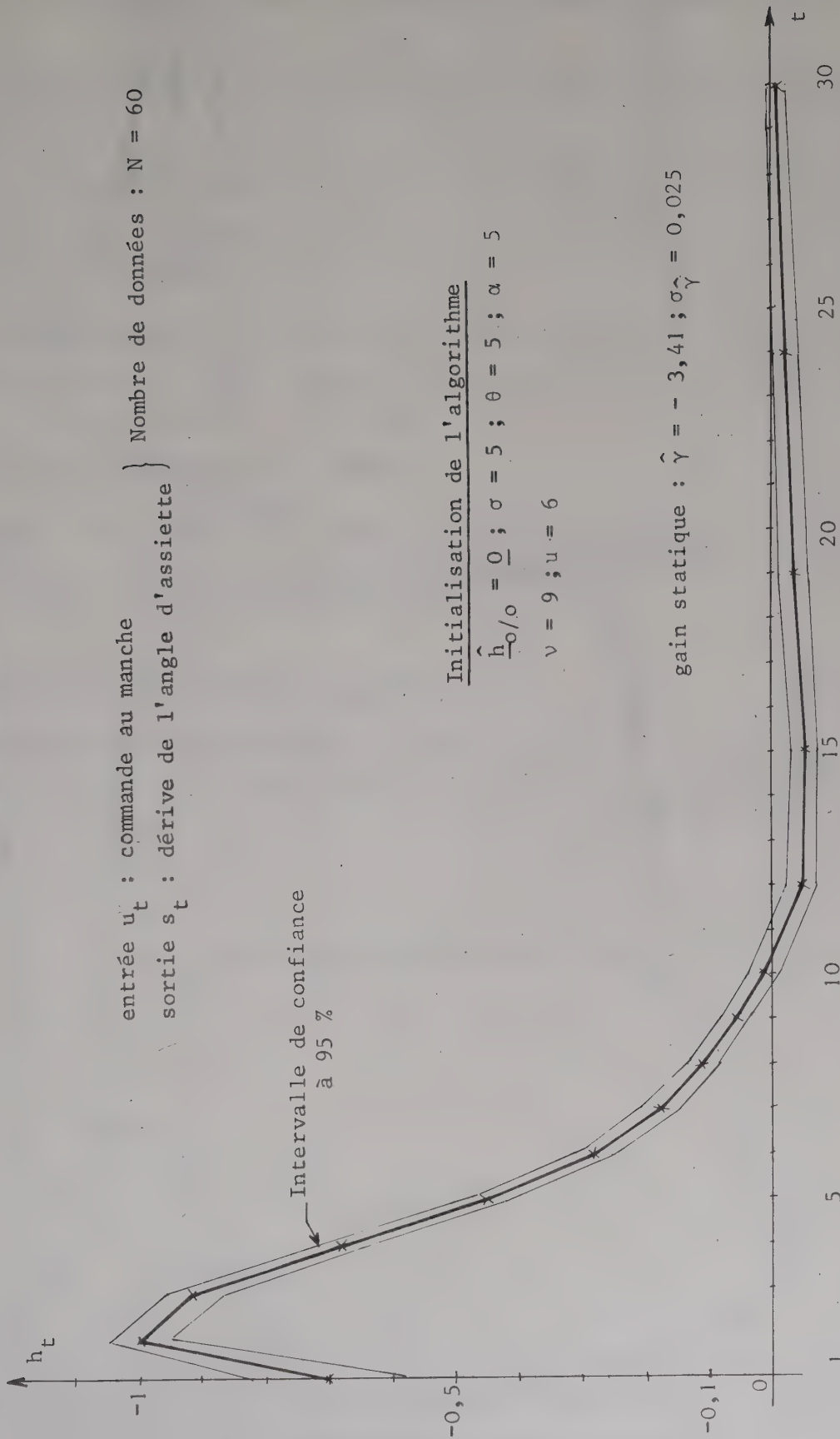


Fig. 14

AVION PIAGGO

(chaîne de tangage)

entrée u_t : commande au manche } Nombre de données : $N = 60$
 sortie s_t : dérive de l'angle d'assiette }



Initialisation de l'algorithme

$$\hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 5 ; \theta = 5 ; \alpha = 5$$

$$v = 9 ; u = 6$$

$$\text{gain statique : } \hat{\gamma} = -3,41 ; \sigma_{\hat{\gamma}} = 0,025$$

Fig. 15

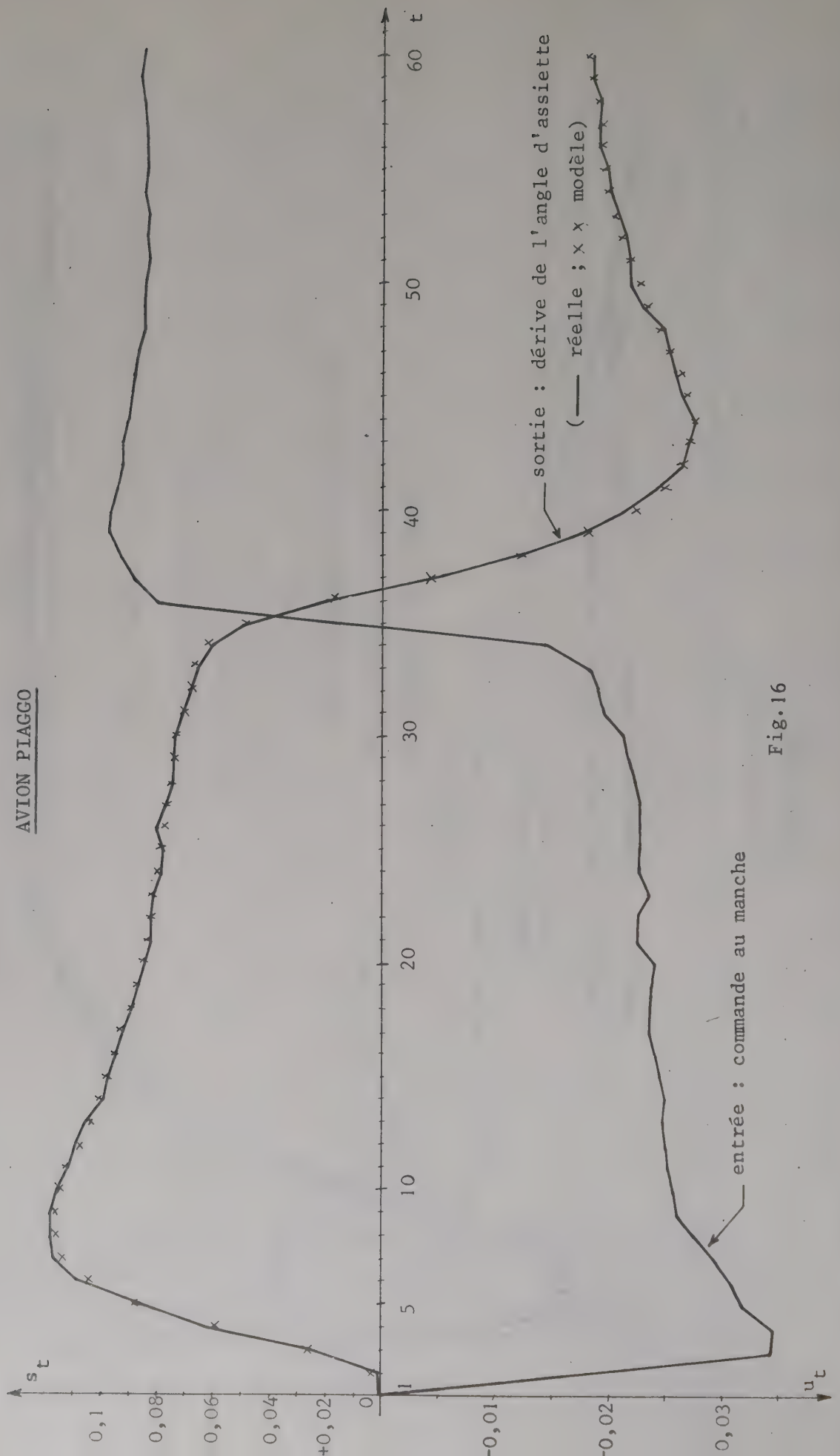


Fig. 16

II-2 Avion Piaggio

Ce problème concerne la chaîne de tangage d'un avion Piaggio, l'entrée étant la commande au manche et la sortie la dérive de l'angle d'assiette. On dispose d'un enregistrement entrée - sortie de 60 points, communiqué par le D.E.R.A.

Nous avons adopté un temps de réponse $m = 30$; l'algorithme a été initialisé par :

$$\hat{h}_{o/o} = 0 ; \sigma = 5 ; \theta = 5 ; \alpha = 5$$

$$v = 9 ; \mu = 6$$

$$\sigma_b = 0,004 ; c = 0$$

L'identification du système et de son environnement a été effectuée en 3 itérations qui ont conduit aux valeurs suivantes des paramètres du bruit :

$$\sigma_b = 0,0014 ; c = 0,210$$

et à la séquence de pondération, figure 15.

Nous avons représenté, figure 16, l'enregistrement à partir duquel l'identification a été faite, ainsi que la sortie "modèle", déduite de la séquence de pondération identifiée (après 3 itérations).

II-3 Unité pilote générateur de vapeur

Nous présentons maintenant les résultats relatifs à l'identification de la chaîne de surchauffe - désurchauffe de l'unité pilote générateur de vapeur du laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. Nous avons schématisé celui-ci à la figure 17.

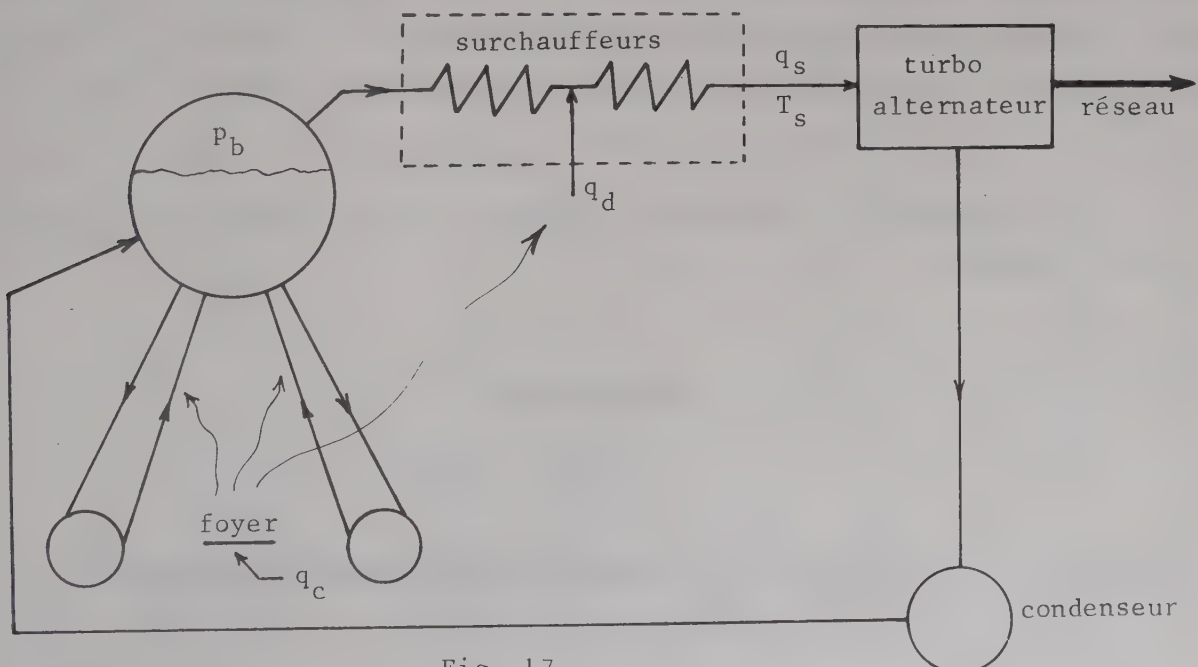


Fig. 17

Nous considérons un modèle à 3 entrées : q_c le débit de combustible, q_s le débit de vapeur surchauffée, q_d le débit d'eau de désurchauffe ; et une sortie T_s la température de la vapeur surchauffée. On a opéré sur un enregistrement de 78 minutes échantillonné avec un pas de 20 s, figure 18. Les débits sont exprimés en kg/h et la température en degrés.

On a pu définir des temps de réponse approchés :

$$m_1 = 53 ; m_2 = 44 ; m_3 = 66$$

ici relativement importants en raison de la valeur du pas d'échantillonnage adopté lors de l'enregistrement. La physique du système nous indique, d'une part, l'existence d'une composante continue, et, d'autre part, que les réponses impulsionnelles sont nulles à l'instant initial. Nous avons, par ailleurs, initialisé l'algorithme avec :

$$\text{entrée 1 : } \hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 0,5 ; \theta = -7 ; \alpha = 10$$

$$v = 8 ; \mu = 9$$

$$\text{entrée 2 : } \hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 0,05 ; \theta = 6 ; \alpha = 10$$

$$v = 8 ; \mu = 8$$

$$\text{entrée 3 : } \hat{h}_{0/0} = 0 ; \sigma = 0,5 ; \theta = 9 ; \alpha = 15$$

$$v = 11 ; \mu = 10$$

$$\text{paramètres des perturbations : } \sigma_b = 1 ; c = 0$$

La méthode d'échantillonnage à pas variable s'est révélée ici très précieuse, étant donné le nombre de coefficients de pondération à estimer ($m_1 + m_2 + m_3 = 163$). Celui-ci a été réduit à $m'_1 + m'_2 + m_3 = 54$, d'où, là encore, un gain de temps dans un rapport d'environ 1 à 10. L'identification globale (processus + environnement) a été obtenue en 3 itérations, et conduit aux résultats de la fig. 19(a,b) et aux valeurs suivantes des paramètres du modèle du bruit :

$$\sigma_b = 1,36 ; c = 0,97$$

On a complété la figure 18 en traçant la sortie "modèle" en regard de la sortie mesurée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jury E.I. "Theory and application of the Z transform method" John Wiley, 1964

Enregistrement entrées - sortie de l'unité pilote

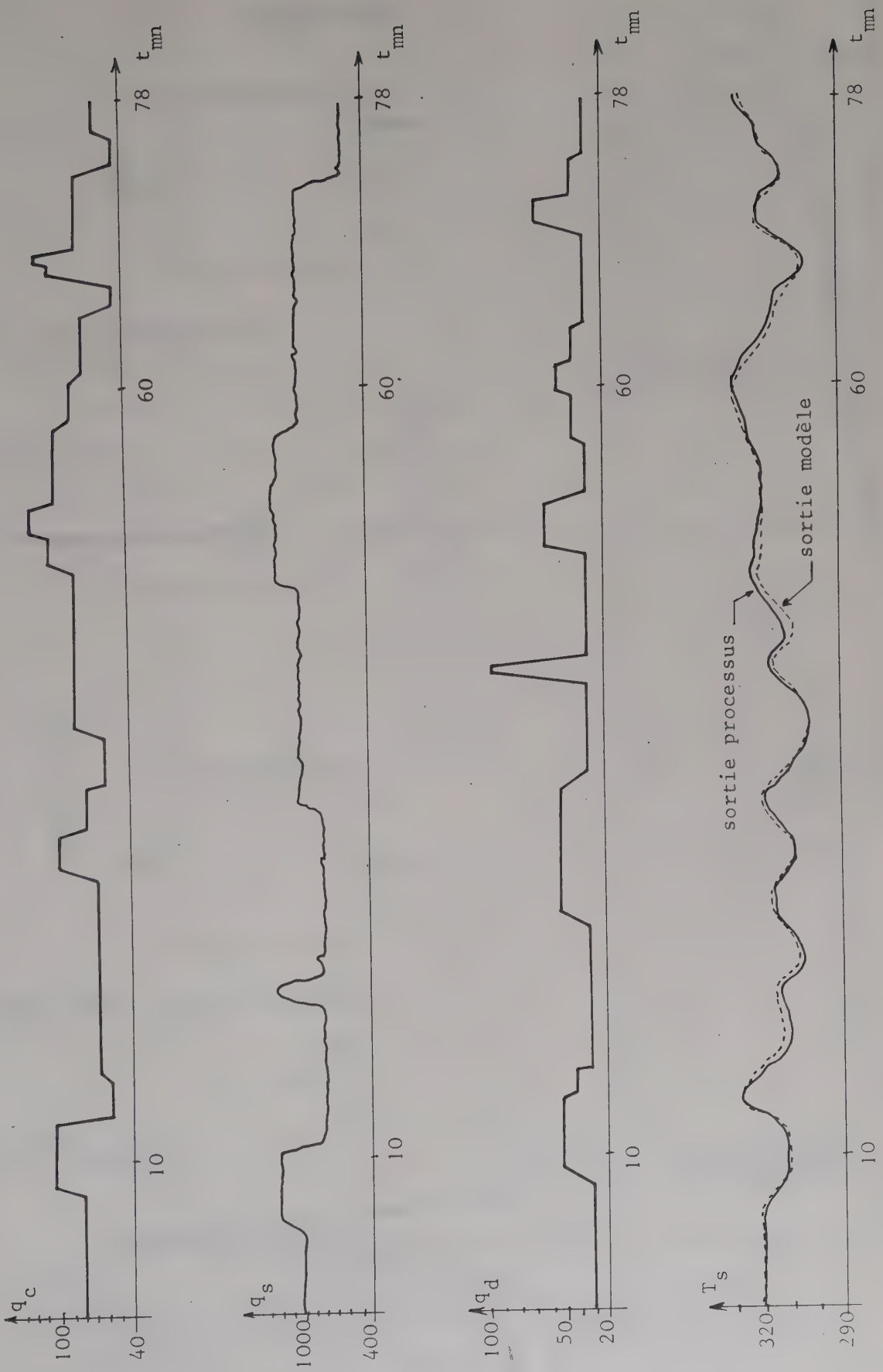


Fig. 18

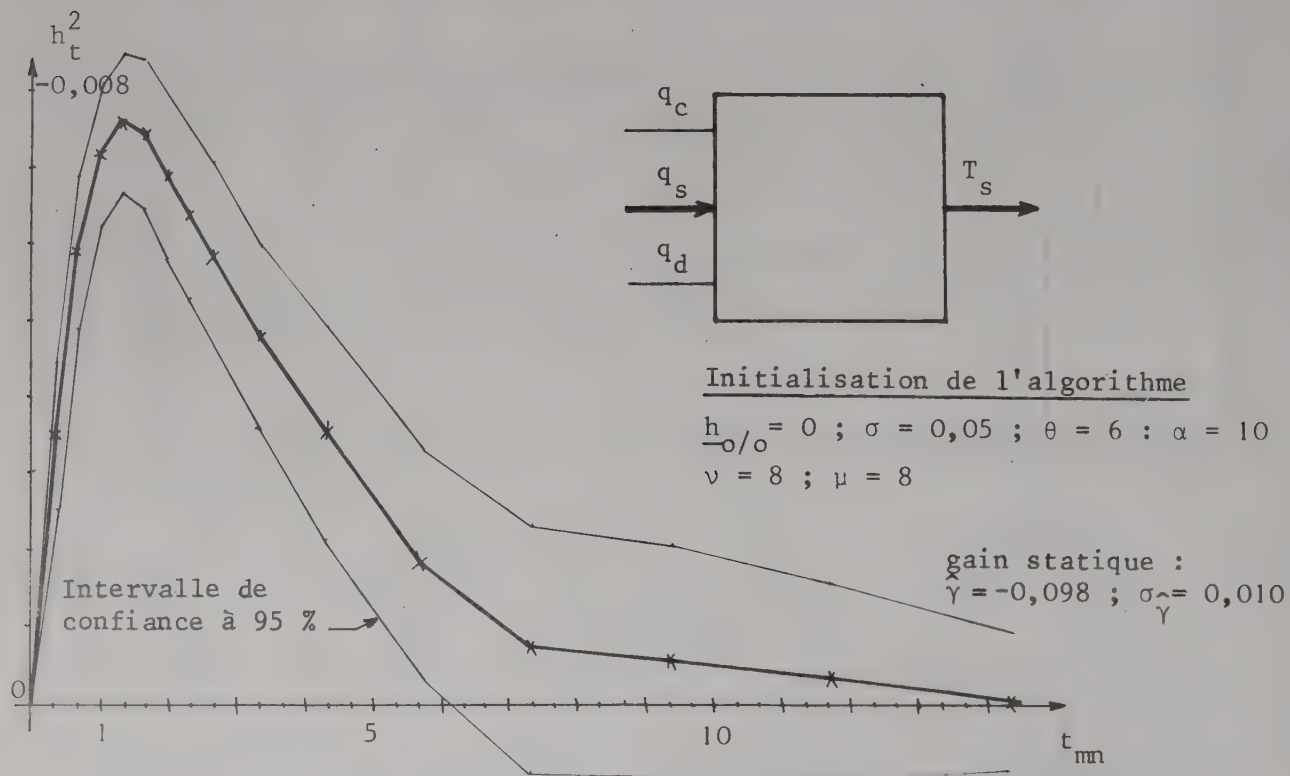
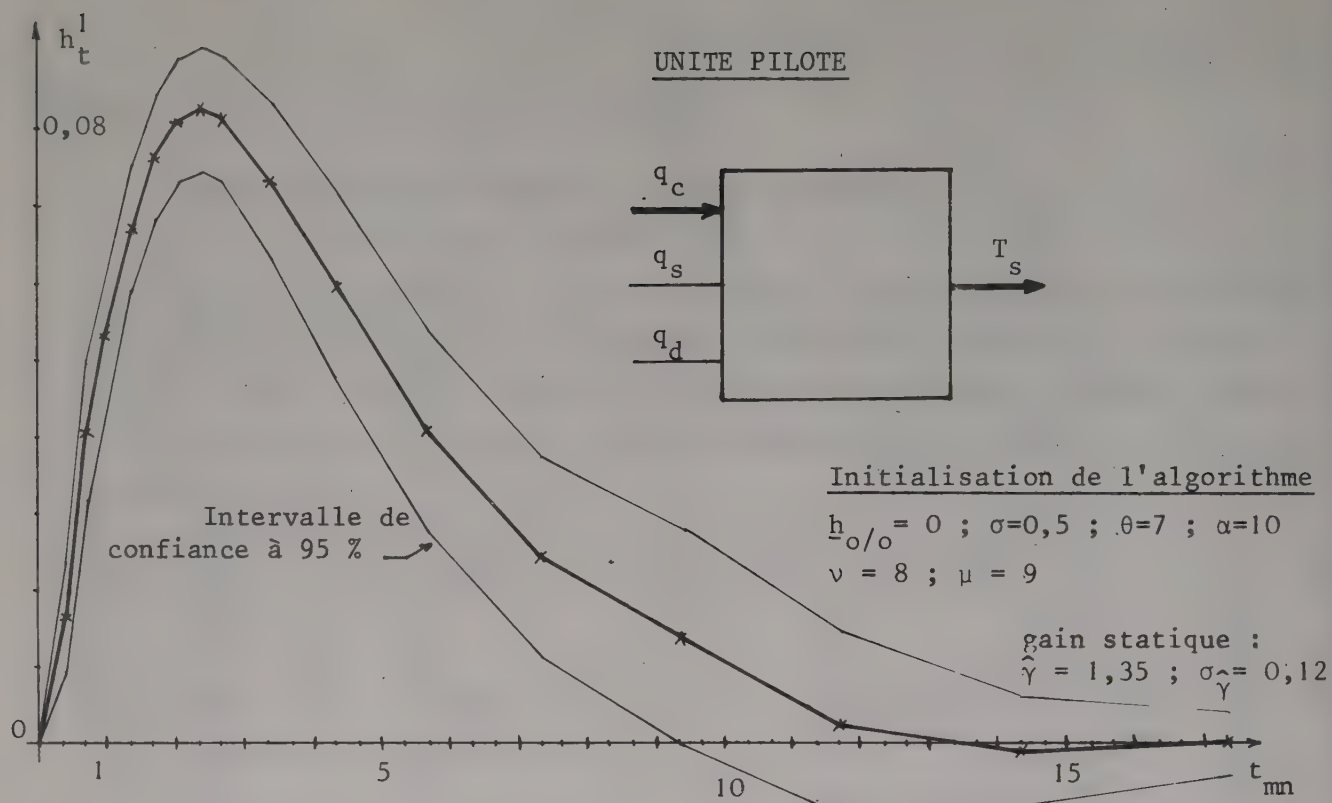


Fig. 19-a

UNITE PILOTE

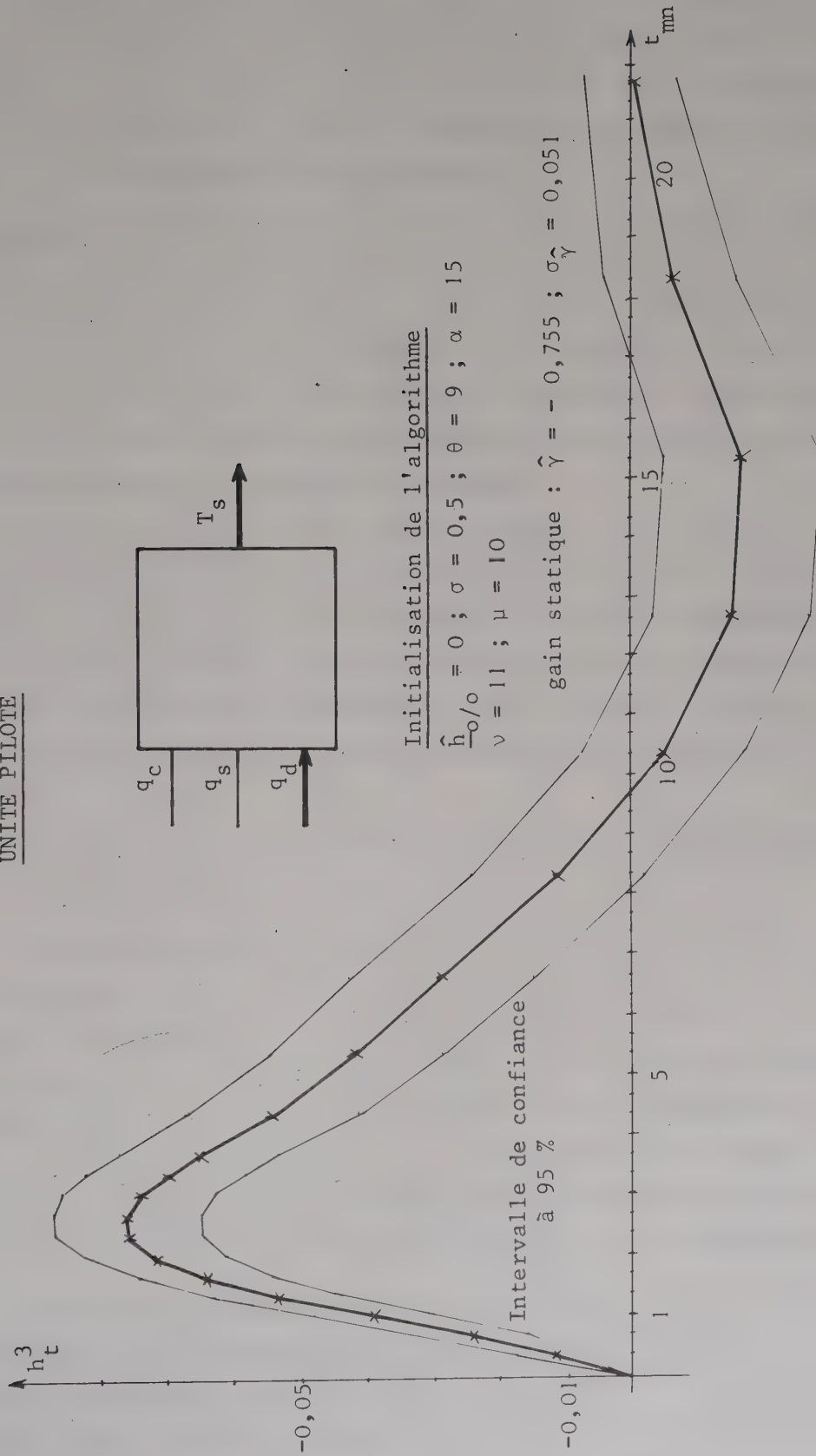
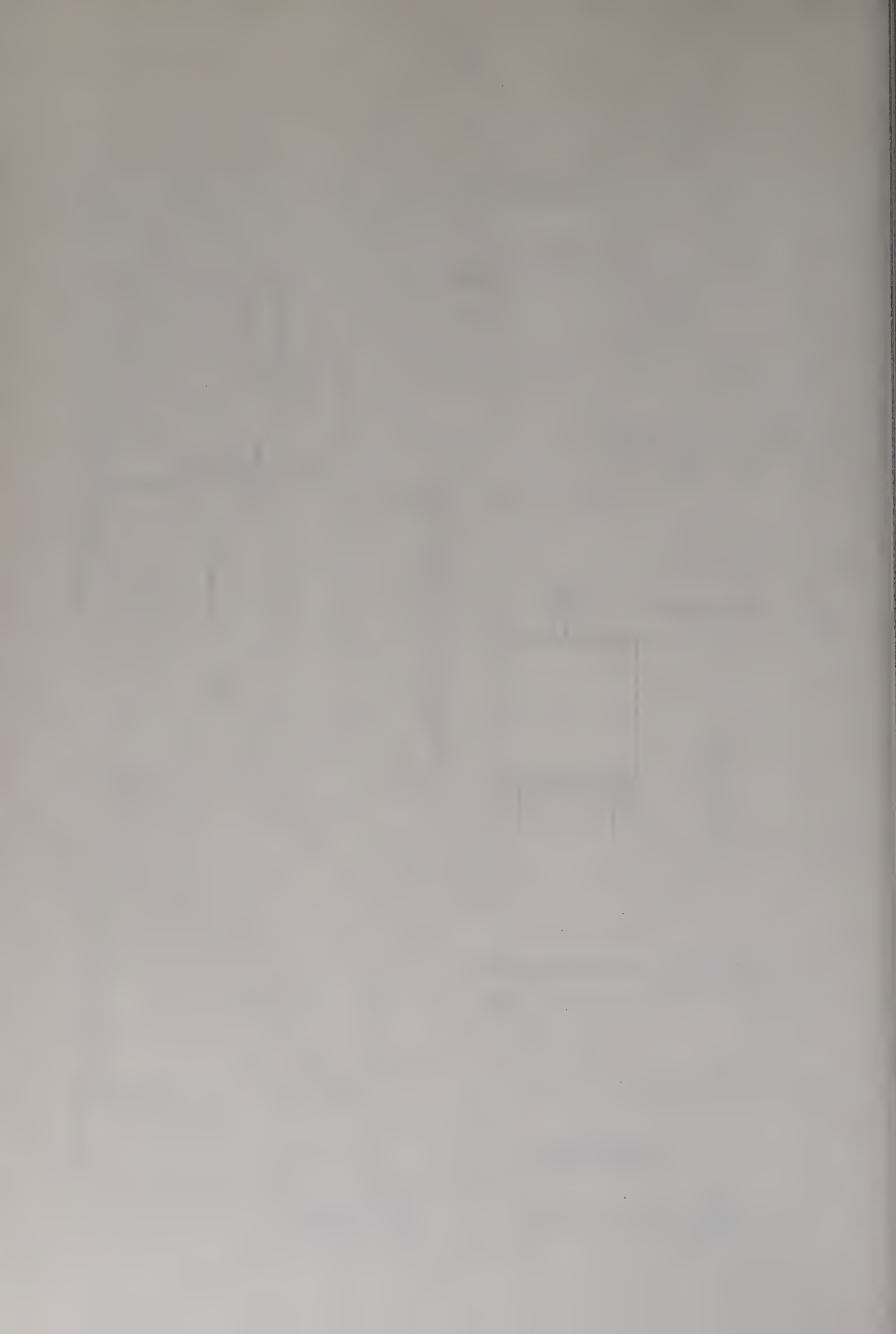


Fig. 19-b



CONCLUSION

Les problèmes d'identification exigent, en général, même pour des systèmes linéaires, un traitement non linéaire des informations, avec les difficultés théoriques et pratiques que cela implique. C'est le cas, par exemple, de l'estimation des paramètres des équations d'état d'un processus, ou encore, des coefficients de sa transmittance en Z (ou en s).

Cependant, ces non linéarités peuvent quelquefois disparaître. C'est, en particulier, le cas lorsqu'on utilise un modèle "séquence de pondération" ou réponse impulsionnelle discrète. Un autre attrait de ce modèle est que, hormis linéarité et stationnarité, aucune hypothèse n'est faite sur la structure des équations du système, et qu'on peut identifier aussi bien la réponse impulsionnelle d'un processus régi par des équations aux dérivées partielles que par des équations ordinaires, à constantes localisées.

Néanmoins, d'autres difficultés surgissent : grande sensibilité au bruit (instabilité bien connue de la déconvolution), dimension du vecteur paramètre à estimer, théoriquement infinie (représentation "non paramétrique"). En fait, pour des systèmes asymptotiquement stables, on peut se contenter d'un nombre fini de "coefficients de pondération", mais celui-ci n'en reste pas moins (généralement) très supérieur au nombre de paramètres d'une transformée en Z correspondante.

C'est précisément pour surmonter ces difficultés que nous avons développé des résultats originaux concernant :

- La prise en compte de connaissances a priori usuelles sur les réponses impulsionnelles (continuité, dérivabilité). Nous avons exposé comment les introduire par l'intermédiaire d'une initialisation convenable d'un algorithme récurrent, constituée par une estimation a priori et sa matrice de covariance associée, pour laquelle nous avons élaboré une structure appropriée. L'utilisateur dispose seulement de 3 paramètres (σ , θ et α), ch 3, § IV, pour caractériser l'ensemble des connaissances a priori. Leur détermination a été rendue aisée en raison de l'interprétation physique qu'on a pu leur attribuer.

- Une méthode d'échantillonnage à pas variable, grâce à laquelle le nombre de "coefficients de pondération", nécessaire pour représenter un système, a pu être réduit quelquefois dans un rapport de 1 à 4, qui se traduit par un temps de calcul de 1 à 16 fois plus petit. Là encore, pour simplifier la tâche

de l'utilisateur, celui-ci n'a à sa disposition que 2 paramètres pour définir la répartition de l'échantillonnage : v , le nombre de pas, constant (égal au pas d'échantillonnage des données entrées - sorties), et μ , le nombre de pas variable (s'incrémentant automatiquement par unité).

C'est en considérant l'identification comme un problème de filtrage linéaire que nous avons élaboré un algorithme, à partir des résultats de la théorie de Kalman.

Ce point de vue, nous l'avons constaté, présente l'avantage, à la fois, de conduire directement à une structure réursive (permettant éventuellement une identification "en ligne") et, d'avoir une formulation extrêmement souple, à partir de laquelle de multiples extensions ont pu être réalisées par la simple adjonction d' "états" supplémentaires.

La mise en oeuvre d'un tel filtre demande, par ailleurs, la connaissance de l'environnement stochastique du processus à identifier. Nous avons ainsi été amenés à développer une méthode d'estimation des caractéristiques statistiques des perturbations (variance, corrélation). Outre la nécessité de cette identification dans le cas présent, celle-ci permet d'améliorer les qualités prédictives du modèle estimé, en déterminant, en moyenne, la contribution du bruit sur la sortie mesurée.

Les résultats que nous avons obtenus, tant en simulation que sur processus réels, ont mis en évidence l'efficacité de la méthode et prouvé qu'elle était réellement opérationnelle. Ajoutons, à cet égard, que l'algorithme n'exige que des moyens de calcul automatique relativement limités et pourrait donc être mis en oeuvre, sans difficultés, sur un calculateur à caractère industriel ; ce qui lui confère un attrait supplémentaire.

Une des principales motivations de l'identification est, rappelons-le, l'élaboration de régulateurs ou de commandes optimales.

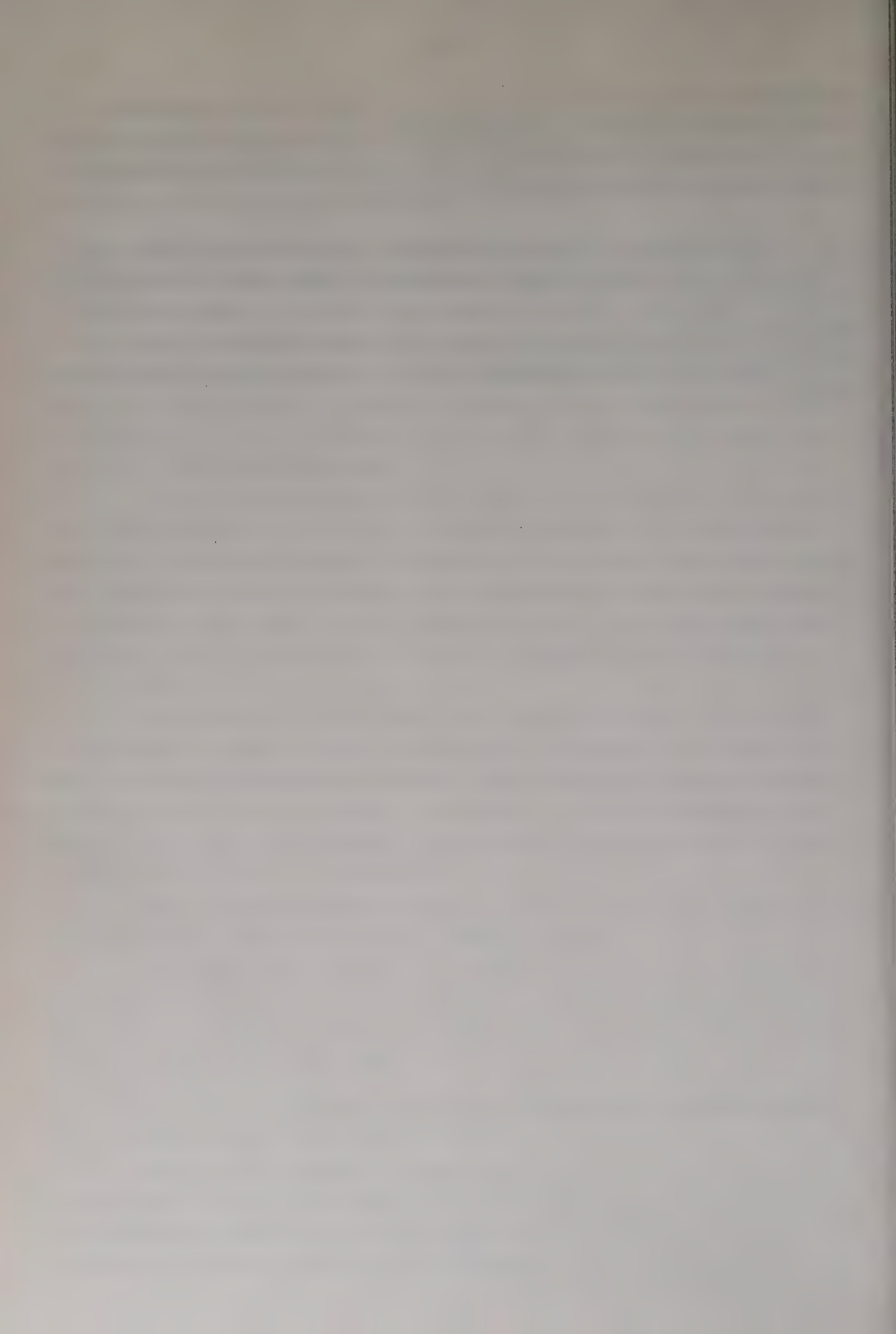
La représentation séquence de pondération, que nous avons adoptée, permet alors éventuellement d'établir directement une commande de processus. Par conséquent, la nature même des résultats, obtenus lors de l'identification, contribue immédiatement à son amélioration.

Néanmoins, c'est plutôt à partir de la connaissance des équations d'état que de tels procédés sont établis.

Depuis quelques années, de nombreux algorithmes de "réalisation" ont vu le jour, dont le but est précisément d'obtenir une structure d'état, à partir de la représentation sous forme de réponses impulsionnelles ou de transmittances. L'intérêt croissant que l'on porte à ces techniques, dont l'algorithme de Ho est

actuellement un des plus efficaces, tant sur le plan "calcul" que théorique, confère une autre dimension à l'algorithme d'identification que nous avons développé. Le couplage de ces deux méthodes permet alors de déduire des données entrées-sorties, une représentation d'état "minimale".

Cependant, des efforts restent encore à faire pour rendre opérationnelle la seconde étape, dans l'optique d'applications industrielles, en raison du volume des algorithmes actuels. C'est dans cette voie que l'on peut obtenir des résultats fructueux ainsi que dans la recherche de solution quasi optimale (réalisation non minimale mais de dimension voisine), conduisant à des méthodes moins lourdes.



Annexe I

Démonstration des relations (2-19) et (2-20).

Soit :

$$R^{-1} = A + U S V^{\dagger} \quad (\text{AI-1})$$

Multiplions les deux membres de cette relation par A^{-1} à droite et R à gauche, il vient :

$$\begin{aligned} R R^{-1} A^{-1} &= R(A + U S V) A^{-1} \\ A^{-1} &= R(1 + U S V A^{-1}) \\ A^{-1} &= R + R U S V A^{-1} \end{aligned} \quad (\text{AI-2})$$

Multiplions (AI-2) par U , on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} U &= R U + R U S V A^{-1} U \\ A^{-1} U &= R U S (S^{-1} + V A^{-1} U)^{++} \\ A^{-1} U (S^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} &= R U S \end{aligned} \quad (\text{AI-3})$$

Multiplions maintenant la relation (AI-3) par $V A^{-1}$, il vient alors :

$$A^{-1} U (S^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} V A^{-1} = R U S V A^{-1}$$

Compte tenu de (AI-2), on obtient finalement :

$$R = A^{-1} - A^{-1} U (S^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} V A^{-1} \quad (\text{AI-4})$$

D'après la définition de R^{-1} (AI-1), l'expression (AI-4) démontre la relation (2-19) qu'on écrit :

$$(A + U S V)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (S^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} V A^{-1}$$

De même l'équation (AI-3) n'est autre que la relation (2-20), soit :

$$A^{-1} U (S^{-1} + V A^{-1} U)^{-1} = (A + U S V)^{-1} U S$$

† Les matrices A , U , S et V sont supposées de dimension adéquate. De plus, on fait l'hypothèse que les matrices A et S sont régulières.

†† La matrice $S^{-1} + V A^{-1} U$ est supposée régulière.

Annexe II

La méthode des moindres carrés conduit à l'estimation $\hat{\underline{h}}_N$ de matrice de covariance P_N donnée respectivement par les équations :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}}_N &= (\underline{U}_N^T \underline{U}_N)^{-1} \underline{U}_N^T \underline{s}_N \\ P_N &= \sigma^2 (\underline{U}_N^T \underline{U}_N)^{-1}\end{aligned}\tag{AII-1}$$

ou encore sous forme récurrente :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}}_{k+1} &= \hat{\underline{h}}_k + P_k \underline{u}_{k+1} (\sigma^2 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} (\underline{s}_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{\underline{h}}_k) \\ P_{k+1} &= P_k - P_k \underline{u}_{k+1} (\sigma^2 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1})^{-1} \underline{u}_{k+1}^T P_k\end{aligned}\tag{AII-2}$$

pour $k = k_0, \dots, N$.

k_0 étant tel que $\underline{U}_{k_0}^T \underline{U}_{k_0}$ soit inversible.

Le procédé est alors initialisé par :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}}_{k_0} &= (\underline{U}_{k_0}^T \underline{U}_{k_0})^{-1} \underline{U}_{k_0}^T \underline{s}_{k_0} \\ P_{k_0} &= \sigma^2 (\underline{U}_{k_0}^T \underline{U}_{k_0})^{-1}\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le procédé récurrent peut être utilisé à partir de $k_0 = 0$, en posant :

$$\begin{aligned}P_0 &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^2 \mathbf{1} \\ \hat{\underline{h}}_0 &\text{ quelconque fini}\end{aligned}\tag{AII-3}$$

Rappelons les notations employées :

$$\begin{aligned}\underline{s}_j^T &= [s_1, s_2, \dots, s_j] \\ \underline{u}_j^T &= [u_j, u_{j-1}, \dots, u_{j-m+1}] \\ \underline{U}_j^T &= [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_j]\end{aligned}$$

Soit la matrice $\underline{U}_{k+p}$ que nous écrivons :

$$\underline{U}_{k+p} = \begin{bmatrix} \underline{U}_k \\ \underline{u}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \underline{u}_{k+p}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_k \\ \underline{U}' \end{bmatrix}$$



Il vient alors :

$$P_{k+p} = \sigma^2 (U_{k+p}^T U_{k+p})^{-1}$$

$$P_{k+p} = (P_k^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} U_p^T U_p')^{-1}$$

En utilisant les relations matricielles (2-19) et (2-20), on a :

$$P_{k+p} = P_k - P_k U_p^T (\sigma^2 \mathbf{1} + U_p' P_k U_p'^T)^{-1} U_p' P_k \quad (\text{AII-4})$$

et

$$P_k U_p^T (\sigma^2 \mathbf{1} + U_p' P_k U_p'^T)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} P_{k+p} U_p^T = K_{k+p} \quad (\text{AII-5})$$

Compte tenu de (AII-1), il vient :

$$\begin{aligned} \hat{h}_{k+p} &= \frac{1}{\sigma^2} P_{k+p} U_{k+p}^T s_{k+p} \\ \hat{h}_{k+p} &= \frac{1}{\sigma^2} (P_k - K_{k+p} U_p' P_k) (U_k^T s_k + U_p^T s_p') \end{aligned} \quad (\text{AII-6})$$

avec :

$$s_p'^T = |s_{k+1}, \dots, s_{k+p}|$$

En développant (AII-6), et en utilisant (AII-4) et (AII-5), on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{h}_{k+p} &= \hat{h}_k - \frac{1}{\sigma^2} K_{k+p} U_p' P_k U_k^T s_k + \frac{1}{\sigma^2} P_{k+p} U_p^T s_p' \\ \hat{h}_{k+p} &= \hat{h}_k - K_{k+p} U_p' \hat{h}_k + K_{k+p} s_p' \\ \hat{h}_{k+p} &= \hat{h}_k + K_{k+p} (s_p' - U_p' \hat{h}_k) \end{aligned} \quad (\text{AII-7})$$

On pose maintenant $k = 0$ et $p = N$, les équations (AII-4) et (AII-7) s'écrivent, en notant que $s_N' = s_N$, $U_N' = U_N$, et compte tenu de la définition de K_N (AII-5) :

$$\begin{aligned} \hat{h}_N &= \hat{h}_0 + P_0 U_N^T (\sigma^2 \mathbf{1} + U_N P_0 U_N^T)^{-1} (s_N - U_N \hat{h}_0) \\ P_N &= P_0 - P_0 U_N^T (\sigma^2 \mathbf{1} + U_N P_0 U_N^T)^{-1} U_N P_0 \end{aligned} \quad (\text{AII-8})$$

Ces équations sont identiques aux relations (2-49) en posant $B = \sigma^2 \mathbf{1}$, et par suite peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{h}_N &= \left(\frac{1}{\sigma^2} U_N^T U_N + P_0^{-1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma^2} U_N^T s_N + P_0^{-1} \hat{h}_0 \right) \\ P_N &= \left(\frac{1}{\sigma^2} U_N^T U_N + P_0^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{AII-9})$$

On a ainsi démontré que la formulation récurrente (AII-2) initialisée par $(\hat{h}_0, P_0)$ peut se mettre sous les formes réduites (AII-8) et (AII-9). De cette dernière expression on déduit immédiatement l'estimation des moindres carrés (AII-1) en posant $P_0^{-1} = 0$ quel que soit $\hat{h}_0$ fini.

